பள்ளிக் கல்வித் துறை

சென்னை மாவட்டம்

கற்றல் கையேடு

2023 - 2024

மேல்நிலை இரண்டாம் ஆண்டு

வணிகக்கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல்

முன்னுரை

குறைந்தபட்ச கற்றல் பொருள் என்ற பெயரில் மாணவர்களுக்கான தனித்துவமான விஷயங்களை (**மேல்நிலை இரண்டாம் ஆண்டு - வணிகக்கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல்**) வெளிக்கொணர மதிப்புள்ள முழு வாய்ப்பை வழங்கிய எங்கள் மரியாதைக்குரிய முதன்மைக் கல்வி அதிகாரிக்கு எங்கள் மனமார்ந்த நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்கிறோம்.

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட அத்தியாயங்களின் அடிப்படையில் குறைந்தபட்ச கற்றல் பொருள் தயாரிக்கப்படுகிறது. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட அத்தியாயங்களுக்கு வகைப்பாடு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பாடப் புத்தகப் பயிற்சிப் பிரச்சனைகள் தீர்க்கப்படுகின்றன (2 மதிப்பெண்கள்; 3 மதிப்பெண்கள் மற்றும் 5 மதிப்பெண்கள்).

மாணவர்கள் வகைப்பாட்டின் அடிப்படையில் எடுத்துக்காட்டு சிக்கல்களைத் தயாரிக்க வேண்டும். அனைத்து பாடப்புத்தக MCQ பிரச்சனைகளும் தவறாமல் பயிற்சி செய்ய வேண்டும். வகைப்படுத்தலில் உள்ள அனைத்து பிரச்சனைகளையும் மாணவர்கள் பயிற்சி செய்ய வேண்டும்.

நல்ல முயற்சி எப்போதும் வெற்றியே

வாழ்த்துகள்!!!

Prepared by:

Thiru. S. Anantha Krishnan,
Headmaster,
M.F.S.D. Hr. Sec. School,
Sowcarpet, Chennai – 79.

Thiru. M.D. Purushothaman,
P.G.Asst.,(Maths),
D.R.B.C.C.C. Hr. Sec. School,
Perambur, Chennai – 11.

Thiru. D. Raman,
P.G.Asst.,(Maths),
Hindu Union Committee Hr. Sec. School,
Choolai, 600112.

Thiru. G. Kiran Kumar Reddy,
P.G.Asst.,(Maths),
S.K.D.T. Hr. Sec. School,
Villivakkam, Chennai - 49

Thiru. S. SenthilVel,
P.G.Asst.,(Maths),
DR. GMTTV Hr. Sec. School,
Sowcarpet, Chennai - 79

Thiru. RajendraPratap Yadav,
P.G.Asst.,(Maths),
M.F.S.D. Hr. Sec. School
Sowcarpet, Chennai - 79

பொருளடக்கம்

வரிசை எண்	அத்தியாயம்	தலைப்பு	பக்க எண்
1	-	கேள்விகளின் வகைப்பாடு	1
2	1	அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்	2
3	3	தொகை நுண்கணிதம்	9
4	5	எண்ணியல் முறைகள்	15
5	8	கூறெடுப்பு முறைகளும் புள்ளியியல் அனுமானித்தலும்	20
6	9	பயன்பாட்டு புள்ளியியல்	28
7	10	செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சி	43
8	-	ஒரு மதிப்பெண் வினாக்கள் விடை மட்டும்	

பாட புத்தக வினாக்களின் வகைப்பாடுகள் (Selected Chapters)

பயிற்சி	2 மதிப்பெண்கள்	3 மதிப்பெண்கள்	5 மதிப்பெண்கள்
1.1	1. (i), (ii), (iii) Eg:1.1, 1.2 Mis-1	1(iv), (v), (vi), (vii), (viii), 2 (AB & BA Separately), 5 Eg: 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11	Ex: 3, 4, 6, 7, 8 Eg: 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18
1.2		1 (i), (ii), 2. 3, 4 Eg 1.19, 1.20, 1.21	Ex:1 (iii), (iv), (v) 5, 6 Eg: 1.22, 1.23, 1.24
1.3		Ex 1, Eg1.25, 1.26, 1.27 Mis: 2, 3, 4, 10	Ex: 2,3,4 Eg1.28 Mis:5, 6, 7, 8, 9
3.1	1, 2, 4, 5 Eg. 3.1, 3.2,3.3	Ex: 3, 6, 7 Eg: 3.5, 3.6, 3.7, 3.8	
3.2	Ex :1, 9, 11 Eg: 3.12	Ex : 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 19,20 Eg: 3.9, 3.10, 3.11, 3.13, 3.15, 3.16, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24, 3.25, 3.26	Ex :2, 14, 17, 18 Eg. 3.14, 3.17, 3.18, 3.19, 3.20
3.3		Ex 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Eg: 3.27, 3.28	Ex : 9, 10, 11 Eg: 3.29
5.1	Ex: 5.1 – 1 Eg: 5.1, 5.4 (i),(ii),(iii)	Ex: 5.1 – 2, 3, 4, 5, 6 Eg : 5.2, 5.3, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10	5.1 – 8 Eg: 5, 11
5.2	Ex: 5.2 – 1, 2 Eg: 5.12	Ex: 5.2 – 3, 4 Eg: 5.13, 5.14	Ex: 5.2 – 5,6,7,8,9,10,11,12 Eg: 5.15, 5.16, 5.17, 5.18, 5.19, 5.20, 5.21, 5.22
8.1	1,2,3,4,5,6,12,14,15 Eg:8.1, 8.2, 8.6, 8.10	10, 11, 13, 16, 17, 18 Eg:8.4, 8.5, 8.7, 8.8, 8.9	7,8,9, 19, 20 Eg 8.3
8.2	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, 12,13	14	15, 16, 17 Eg:8.11, 8.12, 8.13, 8.14, 8.15,8.16, 8.17, 8.18, 8.19 Mis: 1, 4, 6, 7
9.1	1,2,3,4,5,7,8,9,11,16 Eg : 9.1, 9.3	6,10, 12, 14, 15 Eg:9.2, 9.4, 9.5	13, 17, 18, 19, 20, 21,22 Eg 9.6, 9.7, 9.8, 9.9
9.2	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, 11, 12, 13	14, 20, 21, 22 Eg9.15, 9.16, 9.17, 9.18	15, 16, 17, 18, 19 Eg:9.10, 9.11, 9.12, 9.13, 9.14
9.3	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, 11,12,13	Eg 9.19, 9.20 Mis:1,2,6,7	14, 15, 16,17, 18, 19,20, 21 Eg9.21, 9.22, 9.23 Mis: 3,4,5,8,10,11
10.1	1, 2, 3, 4	5, 6, 7, 10, 12 Eg:10.1, 10.2, 10.3, 10.4	8, 9, 11 Eg:10.5, 10.6
10.2	1, 2, 3	4 Eg: 10.9	5, 6, 7, 8 Eg10.7, 10.8,
10.3		1,2, 3, 4 Eg:10.10, 10.11, 10.12 Mis: 1,7	Mis: 2,3,4,5,6

அத்தியாயம் - 1
அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்
(2, 3 , 5 மதிப்பெண்கள்)

பயிற்சி 1.1

கேள்வி 1. அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு :

1 (i) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ A இன் வரிசை 2×2 ஆகும்.

$\therefore \rho(A) \le 2$

2 -ம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருதுக

$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 42 = -2 \ne 0$

$\rho(A) = 2$

1(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ A இன் வரிசை 2×2 ஆகும்.

$\therefore \rho(A) \le 2$

2 -ம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருதுக

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3 \ne 0 \quad \rho(A) = 2$

1(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ A இன் வரிசை 2×2 ஆகும்., $\therefore \rho(A) \le 2$

இப்போது $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$

2 -ம் வரிசை சிற்றணிக்கோவை பூஜ்ஜியமாகிறது

$\therefore \rho(A) \ne 2$

1 -ம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருதுக

$|1| = 1 \ne 0 \quad \therefore \rho(A) = 1$

---

3 - மதிப்பெண்கள்

கேள்வி 1. அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

(iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

A இன் வரிசை 3×3 ஆகும்; $\therefore \rho(A) \le 3$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+5) + 1(3+5) + 1(3-1) = 2(6) + 8 + 2 = 22 \ne 0$

$\therefore \rho(A) = 3$

(v) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

A இன் வரிசை 3×3 ஆகும், $\therefore \rho(A) \le 3$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -1(12-16) - 2(-16+8) - 2(16-6) = 4 + 16 - 20 = 0$

$\therefore \rho(A) \ne 3$

2 -ம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருதுக

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5 \ne 0$

$\therefore \rho(A) = 2$

(vi) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -16 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 2R_1, \; R_3 \to R_3 - 3R_1$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 - 2R_2$

இது ஏறு படி வடிவில் உள்ளது

பூஜ்ஜியமற்ற வரிசைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகும்

$\therefore \rho(A) = 2$

(vii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

A இன் வரிசை 3×4 ஆகும் $\therefore \rho(A) \le 3$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{pmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & -8 & 14 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 3R_1, \; R_3 \to R_3 - R_1$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 - R_2$

பூஜ்ஜியமற்ற வரிசைகளின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும்

$\therefore \boldsymbol{\rho(A) = 3}$

(viii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 + 2R_1, \; R_3 \to R_3 + R_1$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_3 \to R_3 - 2R_2$

பூஜ்ஜியமற்ற வரிசைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகும்

$\therefore \boldsymbol{\rho(A) = 2}$

கேள்வி 2.

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **மற்றும் B=** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **எனில் AB தரத்திறனக் காண்க.**

தீர்வு :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1-2-5 & -2+4-1 & 3-6+1 \\ 2+6+20 & -4-12+4 & 6+18-4 \\ 3+4+15 & -6-8+3 & 9+12-3 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -2 \\ 28 & -12 & 20 \\ 22 & -11 & 18 \end{pmatrix}$

3 -ம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருதுக

$\begin{vmatrix} -6 & 1 & -2 \\ 28 & -12 & 20 \\ 22 & -11 & 18 \end{vmatrix} = -6(-216+220) - 1(504-440) - 2(-308+264) = -6(4) - 1(64) - 2(-56) = 24 \ne 0$

$\therefore \rho(AB) = 3$

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **மற்றும் B=** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **எனில் BA இவற்றின் தரத்திறனக் காண்க.**

தீர்வு :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1-4+9 & 1+6-6 & -1-8+9 \\ -2+8-18 & -2-12+12 & 2+16-18 \\ 5+2-3 & 5-3+2 & -5+4-3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -12 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -12 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 6(8-0) - 1(48-0) + 0(-48+8) = 48 - 48 + 0 = 0 \quad \rho(BA) \ne 3$

2 -ம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருதுக

$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 8 \ne 0. \quad \rho(BA) = 2$

பயிற்சி 1.2

கேள்வி 1.

கீழ்காணும் சமன்பாடுகளை விதியை பயன்படுத்தி தீர்க்க : $2x + 3y = 7; 3x + 5y = 9$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ **{∴ கிரேமரின் விதியைப்பயன்படுத்தலாம்}**

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 27 = 8$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 21 = -3$

அதனால், $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 8$ $\quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -3$

∴ $x = 8$ **மற்றும்** $y = -3$

(ii) $5x + 3y = 17; 3x + 7y = 31$

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 9 = 26 \neq 0$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 17 & 3 \\ 31 & 7 \end{vmatrix} = 119 - 93 = 26$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 17 \\ 3 & 31 \end{vmatrix} = 155 - 51 = 104$

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{26}{26} = 1$ & $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{104}{26} = 4$

∴ $(x, y) = (1,4)$

கேள்வி 2.

3 அலகுகள் தொழிலாளர்களின் சம்பளம் மற்றும் 2 அலகுகள் மூலதனம் கொண்டு தயாரிப்பதும் உற்பத்தி பொருள்களுக்கான செலவு ₹62 ஆகும் . 4 அலகுகள் தொழிலாளர்களின் சம்பளம் மற்றும் 1 அலகுகள் மூலதனம் கொண்டு பொருள்கள் உற்பத்தி செய்யப்பட்டிருந்தால் அதன் மொத்த செலவு ₹56 எனில் ,அணிக்கோவை முறையில் தொழிலாளர் மற்றும் மூலதனத்தின் ஒரு அலகுக்கு ஆகும் செலவினைக் காண்க .

தீர்வு :

ஒரு அலகு தொழிலாளர் செலவு ₹x ஆக இருக்கட்டும்

ஒரு அலகு மூலதனம் ₹ y ஆக இருக்கும்.

$3x + 2y = 62$ **&** $4x + y = 56$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5 \neq 0$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 62 & 2 \\ 56 & 1 \end{vmatrix} = 62 - 112 = -50$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 62 \\ 4 & 56 \end{vmatrix} = 168 - 248 = -80$

∴ $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-50}{-5} = 10$ $\quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-80}{-5} = 16$

எனவே ஒரு அலகு தொழிலாளர் செலவு ₹10 மற்றும் மூலதனத்தின் ஒரு அலகு செலவு ₹16

கேள்வி 3 .

₹8,600 ஆனது இரண்டு கணக்குகளின் முதலீடு செய்யப்படுத்துள்ளது . இதில் ஒரு முதலீடானது $4\frac{3}{4}\%$ -ம் மற்றோரு முதலீடானது $6\frac{1}{2}\%$ -ம் ஆண்டு வருவாயை ஈட்டுத் தருகிறது . ஓர் ஆண்டில் இரு முதலீடுகளுக்கான மொத்த வருமானம் ₹431.25 எனில் , ஒவ்வொரு கணக்கிலும் செய்யப்பட்ட முதலீட்டு தொகையினைக் காண்க.

தீர்வு :

₹x மற்றும் ₹y இரண்டு கணக்குகளிலும் முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகைகளாக இருக்கட்டும்.

முதல் கணக்கிற்கான வட்டி= $4\frac{3}{4}\%x = \frac{19}{4} \times \frac{1}{100} \times x = \frac{19}{400}x$

இரண்டாவது கணக்கிற்கான வட்டி

$$= 6\frac{1}{2}\% = \frac{13}{2} \times \frac{1}{100}y = \frac{13}{200}y$$

$x + y = 8600$

$\frac{19}{400}x + \frac{13}{200}y = 431.25$

சமன்பாட்டை 400 ஆல் பெருக்குதல், $19x + 26y = 172500$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 19 & 26 \end{vmatrix} = 26 - 19 = 7 \neq 0$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8600 & 1 \\ 172500 & 26 \end{vmatrix} = 223600 - 172500 = 51100$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 8600 \\ 19 & 172500 \end{vmatrix} = 172500 - 163400 = 9100$

கிரேமரின் விதிப்படி,

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{51100}{7} = 7300$ & $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{9100}{7} = 1300$

எனவே $4\frac{3}{4}\%$ முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகை ₹7300

மற்றும் தொகை $6\frac{1}{2}\%$ முதலீடு ₹1300

கேள்வி 4.

மெரினா கடற்கரையில் இரண்டு சிறுமிகள் குதிரை சவாரி மற்றும் கிவாட் பைக் சவாரியை மணி நேர வாடகையில் விளையாடுகிறார்கள் . மே மாதத்தின் போது சிறுமி கெரன் ₹780-ம் சிறுமி பெனிட்டா ₹560-ம் செலவு செய்தார்கள் . அதன் விவரம் கீழ்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது .

பெயர்	பயன்படுத்திய காலம் (மணிகளில்)		மொத்த செலவு (₹)
	குதிரை சவாரி	கிவாட் பைக் சவாரி	
கெரன்	3	4	780
பெனிட்டா	2	3	560

இரண்டு விளையாட்டுகளுக்கான ஒரு மணி நேரம் வாடகையை அணிக்கோவை முறையில் காண்க

தீர்வு :

குதிரை சவாரிக்கான 1 மணிநேர கட்டணம் ₹x என்க

கிவாட் பைக் சவாரிக்கான 1 மணிநேரக் கட்டணம் ₹y என்க

$3x + 4y = 780$ & $2x + 3y = 560$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1 \neq 0$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 780 & 4 \\ 560 & 3 \end{vmatrix} = 2340 - 2240 = 100$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 780 \\ 2 & 560 \end{vmatrix} = 1680 - 1560 = 120$

க்ராமரின் விதிப்படி,

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{100}{1} = 100.$ $\quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{120}{1} = 120$

குதிரை சவாரி மற்றும் பைக் சவாரிக்கான மணிநேர கட்டணம் முறையே ₹ 100 மற்றும் ₹ 120.

பயிற்சி 1.3

கேள்வி 1.

ஒரு வாரப்பத்திரிகைக்குச் சந்தா கட்டுமாறு கேட்டுக்கொள்ளப்படும் கடிதம் அந்த பத்திரிக்கை அலுவலகத்திலிருந்து ஏராளமானவர்களுக்கு அனுப்பப்படுகிறது . கடிதம் பெற்றவர்களில் , சந்தாதாரர்களாக இருந்து மீண்டும் சந்தா கட்டுபவர் 45% ஆகும் . சந்தாதாரர்களாக இல்லாமல் இருந்து புதிதாக சந்தா கட்டுபவர்கள் 30% ஆகும் . இதே போல் முன்னர் கடிதம் அனுப்பப்பட்டபோது , கடிதம் பெற்றவர்களில் 40% பேர் சந்தாதார்களாகச் சேர்ந்தனர் எனத் தெரிகிறது தற்போது கடிதத்தைப் பெற்றவர்களில் எத்தனை சதவீதம் பேர் சந்தாதார்களாவர் என எதிர்பார்க்கலாம்.

தீர்வு : X பத்திரிக்கைக்கு குழுசேரும் நபர்களை பிரதிநிதித்துவப்படுத்தட்டும் மற்றும் Y பத்திரிகைக்கு குழுசேராத நபர்களை பிரதிநிதித்துவப்படுத்தட்டும்.

$(X \to X) = 45\% = 0.45$ & $(X \to Y) = 100 - 45 = 55\% = 0.55$

$(Y \to X) = 30\% = 0.3$ & $(Y \to Y) = (100 - 30) = 70\% = 0.7$

$$T = \begin{matrix} & X & Y \\ X & 0.45 & 0.55 \\ Y & 0.3 & 0.7 \end{matrix}$$

X இன் ஆரம்ப மதிப்பு $= 40\% = 0.4;$

$Y = (100 - 40) = 60\% = 0.6$

$$\begin{matrix} X & Y \\ (0.4 & 0.6) \end{matrix} \begin{matrix} & X & Y \\ X & 0.45 & 0.55 \\ Y & 0.3 & 0.7 \end{matrix} =$$

$= (0.4 \times 0.45 + 0.6 \times 0.3 \quad 0.4 \times 0.55 + 0.6 \times 0.7)$

$= (0.18 + 0.18 \quad 0.22 + 0.42) = (0.36 \quad 0.64)$

அதாவது X=36% மற்றும் Y=64%

எனவே தற்போதைய கடிதத்தைப் பெறுபவர்களில் 36% பேர் சந்தாவை ஆர்டர் செய்வார்கள் என்று எதிர்பார்க்கலாம்.

---

5 - மதிப்பெண்கள்

கேள்வி 3 .

பின்வரும் சமன்பாட்டு தொகுப்பினை தர முறையில் தீர்க்க $x + y + z = 9$, $2x + 5y + 7z = 52$, $2x + y - z = 0$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள்

$$x + y + z = 9, \; 2x + 5y + 7z = 52, \; 2x + y - z = 0$$

கொடுக்கப்பட்ட அமைப்புடன் தொடர்புடைய அணி

சமன்பாடு $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 52 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A \quad X \quad = B$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 52 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 34 \\ 0 & -1 & -3 & -18 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 34 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \end{pmatrix} R_3 \to 3R_3 + R_2$$

இப்போது $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(A) = 3$

$$[A,B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 34 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \end{pmatrix}$$

பூஜ்ஜியமற்ற மூன்று வரிசைகளைக் கொண்டுள்ளது,

$\rho([A, B]) = 3$

அதாவது, ρ(A)=ρ([A,B])=3= மாறிகளின் எண்ணிக்கை

தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 34 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$x + y + z = 9 \to (1)$

$3y + 5z = 34 \to (2)$

$-4z = -20 \to (3)$

$(3) \Rightarrow z = 5$

$(2) \Rightarrow 3y = 34 - 25 = 9$

$y = 3$

$\Rightarrow x = 9 - 3 - 5$

$x = 1$

கேள்வி 4.

5x + 3y + 7z = 4 , 3x + 26y + 2z = 9 , 7x + 2y +10z = 5 என்ற சமன்பாடுகளை தர முறையில் ஒருங்கமைவுடையது எனக்காட்டுக. மேலும் அவற்றை தீர்க்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள்,

$5x + 3y + 7z = 4$

$3x + 26y + 2z = 9$

$7x + 2y + 10z = 5$

கொடுக்கப்பட்ட அமைப்புடன் தொடர்புடைய அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 26 & 2 \\ 7 & 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$A \quad X \quad = B$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$[A,B] = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 26 & 2 & 9 \\ 7 & 2 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 121 & -11 & 33 \\ 0 & -11 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to 5R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to 5R_3 - 7R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 11 & -1 & 3 \\ 0 & -11 & 1 & -3 \end{pmatrix} R_2 \to R_2/11$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 11 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 + R_2$$

அதாவது, ρ(A)=ρ([A,B])=3 < மாறிகளின் எண்ணிக்கை

தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது எண்ணற்ற பல தீர்வுகளைக் கொண்டுள்ளன

$\Rightarrow 5x + 3y + 7z = 4$..................(1)

$11y - z = 3$..................(2)

Z= k

$(2) \Rightarrow 11y = k + 3 \Rightarrow \quad y = \frac{k+3}{11}$

$(1) \Rightarrow 5x + 3(\frac{k+3}{11}) + 7k = 4$

$\frac{55x + 3k + 9 + 77k}{11} = 4$; 55x = 35 -80k ; 11x = 7 -16k ;

$x = \frac{-16}{11}k + \frac{7}{11}$

$z = k$, $k \in R$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

$y = \frac{k+3}{11}$, $x = \frac{-16}{11}k + \frac{7}{11}$

k க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகளைக் கொடுப்பதன் மூலம், வெவ்வேறு தீர்வுகளைப் பெறுகிறோம்.

இவ்வாறு கொடுக்கப்பட்ட அமைப்பின் தீர்வு

$\mathbf{x = \frac{1}{11}(7 - 16k)}$; $\mathbf{y = \frac{1}{11}(3 + k)}$; $\mathbf{z = k}$

கேள்வி 5.

பின்வரும் சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு தர முறையில் ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு எனக்காட்டுக:

x + y + z = 3, x + 2y + 3z = 4, x + 4y + 9z = 6.

தீர்வு :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$A \quad X = \quad B$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$[A,B] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - 3R_2$$

$\rho(A) = \rho([A,B]) = 3$

அதாவது, ρ(A)=ρ([A,B])=3= மாறிகளின் எண்ணிக்கை

தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x + y + z = 3$...... (1);

$y + 2z = 1$......(2);

$2z = 0$...... (3)

$(3) \Rightarrow z = 0 \quad (2) \Rightarrow y = 1$

$(1) \Rightarrow x + 1 + 0 = 3 \Rightarrow x = 2$

அதனால் தனித்துவமான தீர்வு உள்ளது

$x = 2, y = 1, z = 0$

கேள்வி 6.

λ –ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிராது என தர முறையில் காண்க:

3x − y + λz = 1 , 2x + y + z = 2 , x + 2y −λz = −1.

தீர்வு :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & \lambda \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$A \quad X \quad = \quad B$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$[A,B] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\lambda & -1 \\ 0 & -3 & 1+2\lambda & 4 \\ 0 & -7 & 4\lambda & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\lambda & -1 \\ 0 & -3 & 1+2\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -2\lambda - 7 & -16 \end{pmatrix} R_3 \to 3R_3 - 7R_2$$

$,\rho([A,B]) \neq \rho(A)$

$\rho([A,B]) = 3$; அதனால் $\rho(A) \neq 3$

$\Rightarrow -2\lambda - 7 = 0 \Rightarrow -2\lambda = 7 \quad \lambda = \frac{-7}{2}$

அதனால் $\lambda = \frac{-7}{2}$,

கேள்வி 7.

X, Y மற்றும் Z ஆகிய மூன்று பொருள்களின் விலைகள் முறையே x, y மற்றும் z ஆகும். திரு. ஆனந்த் அவர்கள் Z – ல் 6 பொருள்களை வாங்கி, X-ல் 2 பொருள்கள் மற்றும் Y-ல் 3 பொருள்களை விற்கிறார். திரு. அமீர் அவர்கள் Y-ல் ஒரு பொருளை வாங்கி, X-ல் 3 பொருள்கள் மற்றும் Z-ல் 2 பொருள்களை விற்கிறார். திரு. அமித்அவர்கள் X-ல் ஒரு பொருளை வாங்கி Y-ல் மூன்று பொருள்கள் மற்றும் Z-ல் ஒரு பொருளை விற்கிறார். இதன் மூலமாக அவர்கள் மூவரும், முறையே ₹5,000, ₹2,000 மற்றும் ₹5,500 என வருமானம் பெறுகின்றனர் எனில் அம்மூன்று பொருள்களின் விலைகளைக் காண்க.

தீர்வு :

	X	Y	Z
ஆனந்த்	2 அலகுகள் (+) விற்கிறார்	3 அலகுகள் (+) விற்கிறார்	6 யூனிட் (-) வாங்குகிறார்
அமீர்	3 அலகுகள் (+) விற்கிறார்	1 யூனிட் (-) வாங்குகிறார்	2 அலகுகள் (+) விற்கிறார்
அமித்	1 யூனிட் (-) வாங்குகிறார்	3 அலகுகள் (+) விற்கிறார்	2 அலகுகள் (+) விற்கிறார்

X,Y,Z ஆகிய மூன்று பொருட்களின் விலை x,y,z என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆனந்த் $\rightarrow 2x + 3y - 6z = 5000$

அமீர் $\rightarrow 3x - y + 2z = 2000$

அமித்$\rightarrow - x + 3y + z = 5500$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 2000 \\ 5500 \end{pmatrix}$$

A X = B

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி: [A,B]= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 & 5000 \\ 3 & -1 & 2 & 2000 \\ -1 & 3 & 1 & 5500 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5500 \\ 3 & -1 & 2 & 2000 \\ 2 & 3 & -6 & 5000 \end{pmatrix} R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5500 \\ 0 & 8 & 5 & 18500 \\ 0 & 9 & -4 & 16000 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 + 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5500 \\ 0 & 72 & 45 & 166500 \\ 0 & 72 & -32 & 128000 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow 9R_2 \\ R_3 \rightarrow 8R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5500 \\ 0 & 72 & 45 & 166500 \\ 0 & 0 & -77 & -38500 \end{pmatrix} R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$\rho(A) = \rho([A, B]) = 3$

அதாவது, ρ(A)=ρ([A,B])=3= மாறிகளின் எண்ணிக்கை தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 72 & 45 \\ 0 & 0 & -77 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5500 \\ 166500 \\ -38500 \end{pmatrix}$$

$-x + 3y + z = 5500$.....................(1)

$72y + 45z = 166500$..................(2)

$-77z = - 38500$...............(3)

$(3) \Rightarrow z = \frac{-38500}{-77} = 500$

$(2) \Rightarrow 72y = 166500 - 45(500)$

$72y = 166500 - 22500 \Rightarrow y = 2000$

$(1) \Rightarrow x = 3(2000) + 500 - 5500 \Rightarrow x = 1000$

மூன்று பொருட்களின் யூனிட் விலை ரூ.1000, ரூ. 2000 மற்றும் ரூ. 500

கேள்வி 8.

ஒரு தொகை ₹5,000 ஆனது ஆண்டிற்கு 6%, 7% மற்றும் 8% தரக்கூடிய மூன்று பங்குகளில் பிரித்து முதலீடு செய்யப்பட்டு, ஆண்டு மொத்த வருமானமாக ₹358 பெறப்படுகிறது. முதல் இரண்டு முதலீடுகளிலிருந்து கிடைக்கும் வருமானம், மூன்றாவது முதலீட்டிலிருந்து கிடைக்கும் வருமானத்தை விட ₹70 அதிகம் எனில், அம்மூன்று பங்குகளில் செலுத்தப்படும் முதலீடுகளை தரமுறையில் காண்க.

தீர்வு :

மூன்று வெவ்வேறு பத்திரங்களில் முதலீட்டின் அளவு முறையே ரூ. x, ரூ. y மற்றும் ரூ. z .

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளின்படி பின்வரும் சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறோம்,

$x + y + z = 5000$

$\frac{6}{100}x + \frac{7}{100}y + \frac{8}{100}z = 358 \text{ (or) } 6x + 7y + 8z = 35800$

$\frac{6}{100}x + \frac{7}{100}y = 70 + \frac{8}{100}z \text{ (or) } 6x + 7y - 8z = 7000$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 35800 \\ 7000 \end{pmatrix}$$

A X = B

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி: [A,B]=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 6 & 7 & 8 & 35800 \\ 6 & 7 & -8 & 7000 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 6 & 7 & 8 & 35800 \\ 0 & 0 & -16 & -28800 \end{pmatrix} R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 1 & 2 & 5800 \\ 0 & 0 & -16 & -28800 \end{pmatrix} R_2 \rightarrow R_2 - 6R_1$$

$\rho(A) = \rho([A, B]) = 3$

அதாவது, ρ(A)=ρ([A,B])=3= மாறிகளின் எண்ணிக்கை தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது

அணி சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டது

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 5800 \\ -28800 \end{pmatrix}$$

$x + y + z = 5000$...(1)

$y + 2z = 5800$...(2)

$-16z = - 28800$...(3)

$(3) \Rightarrow z = 1800$

$(2) \Rightarrow y = 5800 - 2(1800) = 2200$

$(1) \Rightarrow x = 5000 - 2200 - 1800 = 1000$

மூன்று பத்திரங்களில் முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகை ₹ 1000, ₹ 2200 மற்றும் ₹ 1800 ஆகும்.

பயிற்சி 1.2

கேள்வி 1.

கீழ்காணும் சமன்பாடுகளை க்ராமரின் விதியை பயன்படுத்தி தீர்க்க.

(iii) $2x + y - z = 3, x + y + z = 1, x - 2y - 3z = 4$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2(-3+2) - 1(-3-1) - 1(-2-1) = 2(-1) - 1(-4) - 1(-3) = -2+4+3 = 5 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3(-3+2) - 1(-3-4) - 1(-2-4) = 3(-1) - 1(-7) - 1(-6) = -3+7+6 = 10$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2(-3-4) - 3(-3-1) + (-1)(4-1) = 2(-7) - 3(-4) - 1(3) = -14 + 12 - 3 = -5$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(4+2) - 1(4-1) + 3(-2-1) = 2(6) - 1(3) + 3(-3) = 12-3-9 = 12-12 = 0$$

$\Delta_x = \frac{10}{5} = 2$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1$; $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{0}{5} = 0$

∴ **தீர்வு** : $(x,y,z) = (2, -1, 0)$

1(iv) $x + y + z = 6, 2x + 3y - z = 5, 6x - 2y - 3z = -7$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1(-9-2) - 1(-6+6) + 1(-4-18) = 1(-11) - 1(0) + 1(-22) = -11-22 = -33$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ -7 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 6(-9-2) - 1(-15-7) + 1(-10+21) = 6(-11) - 1(-22) + 1(11) = -66+22+11 = -66+33 = -33$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 6 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 1(-15-7) - 6(-6+6) + 1(-14-30) = 1(-22) - 6(0) + 1(-44) = -22-44 = -66$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 1(-21+10) - 1(-14-30) + 6(-4-18) = 1(-11) - 1(-44) + 6(-22) = -11+44-132 = -99$$

$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-33}{-33} = 1$

$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-66}{-33} = 2$

$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-99}{-33} = 3$

தீர்வு - $(x,y,z) = (1,2,3)$.

1(v) $x + 4y + 3z = 2, 2x - 6y + 6z = -3, 5x - 2y + 3z = -5$

தீர்வு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -6 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1(-18+12) - 4(6-30) + 3(-4+30) = 1(-6) - 4(-24) + 3(26) = -6+96+78 = 168 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & -6 & 6 \\ -5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2(-18+12) - 4(-9+30) + 3(6-30) = 2(-6) - 4(21) + 3(-24) = -12-84-72 = -168$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 1(-9+30) - 2(6-30) + 3(-10+15) = 1(21) - 2(-24) + 3(5) = 84$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -6 & -3 \\ 5 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 1(30-6) + 4(-10+15) + 2(-4+30) = 1(24) - 4(5) + 2(26) = 56$$

$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-168}{168} = -1$

$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{84}{168} = \frac{1}{2}$

$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{56}{168} = \frac{1}{3}$

தீர்வு : $(x,y,z) = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

கேள்வி 5.

ஒரு சந்தை ஆய்விற்கு A ,B மற்றும் C ஆகிய பொருட்கள் எடுத்து கொள்ளப்படுகிறது . குறியீட்டு எண்ணை காண்பதற்கு ஒவ்வொரு பொருளும் மூன்று வித தரங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டு அவற்றிற்கு நிலையான எடைகள் ஒதுக்கப்படுகிறது . மூன்று பொருள்களின் நுகர்வு பற்றிய தகவல்கள் மற்றும் பொருள்களின் மொத்த எடைகள் ஆகியவை கீழேயுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன .

பொருள்கள்	தரங்களின் நுகர்கவுகள்			மொத்த எடைகள்
	I	II	III	
A	1	2	3	11
B	2	4	5	21
C	3	5	6	27

மூன்று தரங்களுக்கும் ஒதுக்கப்பட்ட எடைகளை க்ராமரின் விதியைப் பயன்படுத்திக் காண்க

தீர்வு :

மூன்று வகைகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்ட எடைகள் முறையே x,y மற்றும் z ஆக இருக்கட்டும்.

பிரச்சனையின் படி,

A வகைக்கு , $x + 2y + 3z = 11$

B வகைக்கு, $2x + 4y + 5z = 21$

C வகைக்கு , $3x + 5y + 6z = 27$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1(24-25) - 2(12-15) + 3(10-12)$$

$$= -1 - 2(-3) + 3(-2) = -1 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 3 \\ 21 & 4 & 5 \\ 27 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 11(24-25) - 2(126-135) + 3(105-108)$$

$$= -11 + 18 - 9 = -2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 3 \\ 2 & 21 & 5 \\ 3 & 27 & 6 \end{vmatrix} = 1(126-135) - 11(12-15) + 3(54-63)$$

$$= -9 + 33 - 27 = -3$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 2 & 4 & 21 \\ 3 & 5 & 27 \end{vmatrix} = 1(108-105) - 2(54-63) + 11(10-12)$$

$$= 3 + 18 - 22 = -1$$

க்ராமரின் விதிப்படி,

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$;

$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3$;

$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$

எனவே மூன்று வகைகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்ட எடைகள் முறையே 2, 3 மற்றும் 1 அலகுகள்.

கேள்வி 6.

மொத்த தொகை ₹8500 ஆனது வட்டி வருமானம் தரும் மூன்று விதமான கணக்குகளில் முதலீடு செய்யப்பட்டது . ஒவ்வொரு முதலீட்டுக்கான வட்டிவீதம் 2% , 3% மற்றும் 6% ஆகவும் , ஒரு வருடத்திற்கான மொத்த வட்டி ஆகவும் உள்ளது . மேலும் 6% முதலீட்டு தொகையானது மற்ற இரண்டு முதலீடுகளின் கூட்டுத்தொகைக்கு சமம் எனில் , விதியைக் கொண்டு ஒவ்வொரு பிரிவிலும் செய்த முதலீட்டுத் தொகை எவ்வளவு ?

தீர்வு :

மூன்று கணக்குகளில் முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகை முறையே ரூ. x, ரூ. y மற்றும் ரூ. z மூன்று கணக்குகளுக்கான வட்டி $\frac{2}{100}x, \frac{3}{100}y$ மற்றும் $\frac{6}{100}z$

x+y+z=8500...... (1)

$\frac{2}{100}x + \frac{3}{100}y + \frac{6}{100}z = 380$

(அல்லது) 100 ஆல் பெருக்குதல் ,

$2x + 3y + 6z = 38000$.........(2)

$z = x + y$ or $x + y - z = 0$.........(3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 1(-3-6) - 1(-2-6) + 1(2-3)$

$= (-9) - 1(-8) + 1(-1) = -9 + 8 - 1 = -2 \neq 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8500 & 1 & 1 \\ 38000 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 8500(-3-6) - 1(-38000) + 1(38000)$

$= -76500 + 76000 = -500$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 8500 & 1 \\ 2 & 38000 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 1(-38000) - 8500(-2-6) + 1(-38000)$

$= -38000 + 68000 - 38000 = -8000$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8500 \\ 2 & 3 & 38000 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 1(-38000) - 1(-38000) + 8500(2-3)$

$= -38000 + 38000 - 8500 = -8500$

அதனால் க்ரேமர் விதிப்படி,

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-500}{-2} = 250$

$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-8000}{-2} = 4000$

$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-8500}{-2} = 4250$

இவ்வாறு 2% முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகை ₹250, 3%ல் ₹4000 மற்றும் 6%ல் ₹4250.

பயிற்சி 1.3

கேள்வி 2.

சென்னை நகரில் ஒரு புதிய போக்குவரத்து வசதி தற்போது செயல்பாட்டிற்கு வந்துள்ளது. அதனை இந்த ஆண்டு பயன்படுத்துபவர்கள் 30% பேர் அடுத்த ஆண்டு பயன்படுத்தாமல் மெட்ரோ ரயில் வண்டிக்கு மாறிவிடுவர். மீதி 70% தொடர்ந்து அப்புதிய போக்குவரத்து வசதியை பயன்படுத்துவர். இந்த ஆண்டு மெட்ரோ ரயில் வண்டியை பயன்படுத்துவர்களில் 70 சதவீதம் பேர் அடுத்த ஆண்டும் தொடர்ந்து அதையே பயன்படுத்துவர். மீதி 30% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதிக்கு மாறிவிடுவர். சென்னை நகர மக்கள் தொகை மாறாமல் இருக்கிறது என்றும் பயணிகளின் அடுத்த ஆண்டில் 60 சதவீதம் பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியையும் 40 சதவீதம் பேர் மெட்ரோ ரயில் வண்டியையும் பயன்படுத்துவார்கள் எனக் கொண்டால்,

(i) அதற்கு அடுத்த ஆண்டில் எத்தனை சதவீதம் பயணிகள் புதிய போக்குவரத்து வசதியை பயன்படுத்துவார்கள் என எதிர்பார்க்கலாம்

(ii) காலப்போக்கில் எத்தனை சதவீதம் பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர் .

தீர்வு :

T என்பது புதிய போக்குவரத்து வசதி,

M என்பது மெட்ரோ ரயிலையும் குறிக்கலாம்.

கேள்வியிலிருந்து,

$(T \to T) = 70\% = 0.7$; $(T \to M) = 30\% = 0.3$

$(M \to T) = 30\% = 0.3$; $(M \to M) = 70\% = 0.7$

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி $T = \begin{matrix} \\ T \\ M \end{matrix} \begin{pmatrix} T & M \\ 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$

தற்போதைய நிலை T=60% மற்றும் M=40%

(T M) = (0.6 0.4)

ஒரு வருடம் கழித்து T மற்றும் M இன் மதிப்புகளை நாம் கணிக்க வேண்டும்.

(i) $(0.6 \quad 0.4)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = (0.42 + 0.12 \qquad 0.18 + 0.28)$

$= (0.54 \quad 0.46)$

$T = 0.54 = 54\%$ & $M = 0.46 = 46\%$

அதனால் ஓராண்டுக்குப் பிறகு, 54% பயணிகள் போக்குவரத்து முறையைப் பயன்படுத்துவார்கள் மற்றும் 46% பயணிகள் மெட்ரோ ரயிலைப் பயன்படுத்துவார்கள்.

(ii) **சமநிலையில்:** $(T\ M)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = (T \quad M)$

அணி பெருக்கல் மூலம்,

$(0.7\,T + 0.3M \quad 0.3\,T + 0.7M) = (T \quad M)$

தொடர்புடைய கூறுகளை சமன் செய்தல்,

$0.7\,T + 0.3M = T \Rightarrow 0.3\,M = T - 0.7\,T = 0.3\,T$

$0.3\,T = 0.3\,M \Rightarrow \frac{T}{M} = \frac{0.3}{0.3} = \frac{1}{1}$

$T = \frac{1}{2} X\, 100 = 50\%$ & $M = \frac{1}{2} X\, 100 = 50\%$

இதனால் நீண்ட காலத்திற்கு 50% பயணிகள் போக்குவரத்து முறையைப் பயன்படுத்துவார்கள், 50% பேர் மெட்ரோ ரயிலைப் பயன்படுத்துவார்கள்.

கேள்வி 3.

சந்தையிலுள்ள A மற்றும் B இருவகையான சோப்புகளின் தற்போதைய சந்தைப் பங்கீடு 15% மற்றும் 75% ஆகும் . சென்ற ஆண்டு A வாங்கியவர்களின் 65% பேர் மீண்டும் அதை இந்த ஆண்டும் வாங்குகிறார்கள் . 35 % பேர் B -க்கு மாறிவிடுகின்றனர். சென்ற ஆண்டு B வாங்கியவர்களில் 55 % பேர் இந்த ஆண்டும் மீண்டும் அதை வாங்குகிறார்கள் .45% பேர் A -க்கு விடுகிறார்கள் ஒரு ஆண்டுக்கு பிறகு அவற்றின் சந்தைப் பங்கீடுகளைக் காண்க . மேலும் சந்தையில் சமநிலை எப்போதும் எட்டப்படும்.

தீர்வு :

A மற்றும் B இரண்டு வகையான சோப்புகள்.

தற்போதைய சந்தை பங்குகள் 15% மற்றும் 85%.

இது (A B) = (0.15 0.85)

$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}) = \mathbf{65\%} = \mathbf{0.65}$: $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{35\%} = \mathbf{0.35}$

$(\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}) = \mathbf{45\%} = \mathbf{0.45}$: $(\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{55\%} = \mathbf{0.55}$

$$T = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{c} \quad A \qquad B \\ \begin{pmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix} \end{array}$$

(i) <u>ஒரு வருடத்திற்குப் பிறகு</u>

அவர்களின் சந்தைப் பங்குகள் $= (0.15 \quad 0.85)\begin{pmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix}$

$= (0.0975 + 0.3825 \qquad 0.0525 + 0.4675) = (0.48 \quad 0.52)$

$A = 0.48 = 48\%$ & $B = 0.52 = 52\%$

அதனால் ஒரு வருடத்திற்கு பிறகு சோப் A இன் சந்தை பங்குகள் 48% ஆக இருக்கும். மற்றும் சோப் B 52% ஆக இருக்கும்.

(ii) $(A \quad B)\begin{pmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix} = (A \quad B)$

$(0.65\,A + 0.45\,B \qquad 0.35\,A + 0.55\,B) = (A \quad B)$

$0.65\,A + 0.45\,B = A \Rightarrow 0.45\,B = A - 0.65\,A = 0.35\,A$

$0.35\,A = 0.45\,B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{0.45}{0.35} = \frac{45}{35}$ [45+35 = 80]

$A = \frac{45}{80} \text{ X } 100 = 56.25\%$ & $B = \frac{35}{80} \text{ X } 100 = 43.75\%$

சோப்பு A இன் சந்தைப் பங்கு 56.25% ஆகவும், சோப் B இன் சந்தைப் பங்கு 43.75% ஆகவும் இருக்கும் போது சமநிலை அடையும்.

கேள்வி 4.

A மற்றும் B என்ற இரு விற்பனைப் பொருள்களின் தற்போதைய சந்தை விற்பனை 50 % மற்றும் 50%-ஆக உள்ளது நுகர்வோரின் விருப்பங்கள் ஒவ்வொரு வாரமும் மாறுகின்றன . சென்றவாரம் A- ஐ வாங்கியவர்களில் 60% பேர் மீண்டும் A -ஐ வாங்குகின்றனர். 40 % பேர் B -க்கு மாறிவிடுகிறார்கள். சென்ற வாரம் வாங்கியவர்களில் 80% பேர் அதை மீண்டும் வாங்குகிறார்கள். 20% பேர் A -க்கு மாறிவிடுகிறார்கள். இரு வாரங்களுக்குப் பிறகு அவர்களின் சந்தைப் பங்குகளைக் காண்க . இந்த போக்கு தொடருமானால், எப்போது சமநிலை எட்டப்படும்.

தீர்வு :

$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}) = \mathbf{60\%} = \mathbf{0.6}$; $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{40\%} = \mathbf{0.4}$

$(\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}) = \mathbf{20\%} = \mathbf{0.2}$; $(\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{80\%} = \mathbf{0.8}$

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி $T = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{pmatrix} A & B \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$

தற்போதைய சந்தை பங்கு: (A B) = (0.5 0.5)

<u>ஒரு வாரத்திற்குப் பிறகு:</u>

A மற்றும் B இன் பங்குகள் $= \begin{array}{c} \mathbf{A} \quad \mathbf{B} \\ (\mathbf{0.5} \quad \mathbf{0.5}) \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0.6} & \mathbf{0.4} \\ \mathbf{0.2} & \mathbf{0.8} \end{pmatrix}$

$= \begin{array}{c} \mathbf{A} \qquad\qquad \mathbf{B} \\ (\mathbf{0.3 + 0.1} \qquad \mathbf{0.2 + 0.4}) \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{A} \quad \mathbf{B} \\ (\mathbf{0.4} \quad \mathbf{0.6}) \end{array}$

அதனால் ஒரு வாரத்திற்கு பிறகு

A இன் சந்தை பங்கு =0.4=40% மற்றும்

B இன் சந்தை பங்கு 0.6=60%

இரண்டு வாரங்களுக்குப் பிறகு:

A மற்றும் B இன் பங்குகள் $= \begin{array}{c} A \quad B \\ (0.4 \quad 0.6) \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{pmatrix} A & B \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$

$= \begin{array}{c} A \qquad\qquad B \\ (0.24 + 0.12 \qquad 0.16 + 0.48) \end{array} = \begin{array}{c} A \quad B \\ (0.36 \quad 0.64) \end{array}$

இவ்வாறு இரண்டு வாரங்களுக்குப் பிறகு,

A 36% பங்குகளையும், B 64% பங்குகளையும் கொண்டிருக்கும்.

சமநிலை : $(A \quad B)\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (A \quad B)$

$(0.6\,A + 0.2\,B \qquad 0.4\,A + 0.8\,B) = (A \quad B)$

தொடர்புடைய கூறுகளை சமன் செய்தல்,

$0.6\,A + 0.2\,B = A \Rightarrow 0.2\,B = A - 0.6\,A = 0.4\,A$

$0.4\,A = 0.6\,B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{0.6}{0.3} = \frac{6}{3}$ [6 + 3 = 9]

$A = \frac{6}{9} \text{ X } 100 = 66.67\% = 67\%$ & $B = \frac{3}{9} \text{ X } 100 = 33.33\% = 33\%$

A இன் பங்கு 33% ஆகவும், B இன் பங்கு 67% ஆகவும் இருக்கும்போது சமநிலை அடையும்.

அத்தியாயம் - 3

தொகை நுண்கணிதம்

(2, 3 , 5 மதிப்பெண்கள்)

2 - மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி: 3.1

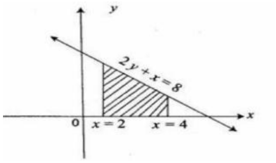
கேள்வி 1.

தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி 2y + x = 8 என்ற கோடு , x- அச்சு மற்றும் x = 2, x= 4 என்னும் எல்லைக்குள் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் 2y+x=8 , x=2,x=4 , x- அச்சு

பரப்பளவு= $\int_2^4 y dx.$



$2y + x = 8 \Rightarrow y = \frac{8-x}{2}$

பரப்பளவு $= \int_2^4 \left(\frac{8-x}{2}\right) dx$

$= \frac{1}{2}\left[8x - \frac{x^2}{2}\right]_2^4$

$= \frac{1}{2}[32 - 8 - 16 + 2]$

$= 5$ சதுர அலகுகள்

கேள்வி 2.

y − 2x − 4 = 0 என்று கோடு, y = 1 மற்றும் y = 3 எனும் எல்லைக்குள் y -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

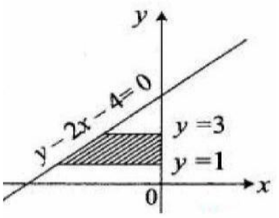
கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள்

$y - 2x - 4 = 0$, $y = 1, y = 3,$ y- அச்சு

$y - 2x = 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{y-4}{2}$

தேவையான பரப்பளவு y-அச்சுக்கு இடதுபுறமாக இருப்பதை கவனிக்கிறோம்

பரப்பளவு $= \int_1^3 -x dy$



$= -\int_1^3 \frac{y-4}{2} dy$

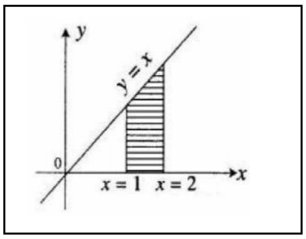
$= -\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2} - 4y\right]_1^3$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{9}{2} - 12 - \frac{1}{2} + 4\right]$

$= -\frac{1}{2}(-4) = 2$ சதுர அலகுகள்

கேள்வி 4.

y = x எனும் கோடு , x - அச்சு,x =1 மற்றும் x =2 எனும் எல்லைக்குள் ஏற்படுத்தும் பரப்பை காண்க.



தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள்

$y = x,$ x- அச்சு,

$x = 1, x = 2$

பரப்பளவு $= \int_1^2 y dx$

$= \int_1^2 x dx = \frac{x^2}{2}]_1^2 = 2 - \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{2}$ சதுர அலகுகள்

கேள்வி 5.

தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி y −1 = x என்ற கோடு , x - அச்சு , x = −2 மற்றும் x = 3 என்னும் எல்லைக்குள் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் $y - 1 = x,$ x- அச்சு,

$x = -2, x = 3$

பரப்பளவு $= \int_{-2}^{-1} -y dx + \int_{-1}^{3} y dx$

$= -\int_{-2}^{-1} (x+1)dx + \int_{-1}^{3} (x+1)dx$

$= -\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_{-1}^{3}$

$= -\left[\frac{(-1+1)^2}{2} - \frac{(-2+1)^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{(3+1)^2}{2} - \frac{(-1+1)^2}{2}\right]_{-1}^{3}$

$= -\frac{1}{2}[0 - 1] + \frac{1}{2}[16 - 0] = \frac{1}{2} + 8 = \frac{17}{2}$ சதுர அலகுகள்

பயிற்சி 3.2

கேள்வி 1.

ஒரு இயந்திரத்தை சரிபார்ப்பதற்கான செலவு மணிக்கு ₹10000 ஆகும். அதன் பரமாரிப்பு செலவு x கி.மீ பயன்பாட்டிற்குப் பிறகு மணிக்கு c'(x)= 2x − 240 என்க . இயந்திரத்தை சரிபார்த்தப்பிறகு 300 மணிநேரம் பயணிப்பதற்கான மொத்த செலவைக் காண்க.

தீர்வு :

$\frac{dc}{dx} = 2x - 240$

$\Rightarrow C = \int MC\, dx + k = \int (2x - 240)dx + k = x^2 - 240x + k$

k என்பது பழுதுபார்க்கும் செலவு $\Rightarrow k = 10,000$

அதனால் $C = x^2 - 240x + 10,000$

x=300 மணிநேரம் என்றால்,

$C = (300)^2 - 240(300) + 10,000$

$\Rightarrow C = 90,000 - 72000 + 10,000 \Rightarrow C = 28,000$

கேள்வி 9.

ஒரு குளிர்சாதனத்தின் இறுதிநிலைச் செலவு $C'(x) = \frac{x^2}{200} + 4$. 200 குளிர்சாதனங்களின் உற்பத்தி செலவைக் காண்க .

தீர்வு :

இறுதிநிலைச் செலவு $= C'(x) = \frac{dc}{dx} = \left(\frac{x^2}{200} + 4\right)$

$\Rightarrow$ மொத்த செலவு $C = \int \left(\frac{x^2}{200} + 4\right)dx + k = \frac{x^3}{600} + 4x + k$

$x = 0, c = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow C = \frac{x^3}{600} + 4x$

$x = 200,\ C = \frac{(200)^3}{600} + 4(200) = \frac{8,000,000}{600} + 800$

$C = 14133.33$

அதனால் 200 குளிர்சாதனங்களின் உற்பத்தி செலவு ₹14133.33

கேள்வி 11.

விற்பனைப பொருள்களின் இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு MR = 9 − 4x² எனில் , தேவைச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு : $MR = 9 - 4x^2$

வருவாய் சார்பு , $R = \int (MR)dx + k$

$R = \int (9 - 4x^2)dx + k = 9x - \frac{4}{3}\mathbf{x^3} + k$

R=0 என்பதால் x=0,k=0 $\Rightarrow R = 9x - \frac{4}{3}\mathbf{x^3}$

தேவை சார்பு $P = \frac{R}{x} \Rightarrow P = 9 - \frac{4}{3}x^2$

3 - மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 3.1

<u>கேள்வி 3.</u>

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையம் அதன் செவ்வகலத்துடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட பரவளையம் -$y^2 = 4ax$,

செவ்வகல சமன்பாடு $x = a$

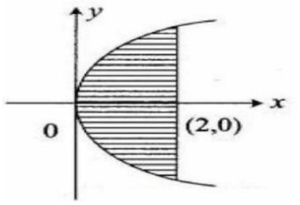
பரப்பளவு $= 2$ [முதல் கால்பகுதியில் உள்ள பரப்பளவு]

வரம்புகள் $x = 0$ மற்றும் $x = a$

$= 2\int_0^a ydx$

$= 2\int_0^a \sqrt{4ax}dx$

$= 2(2\sqrt{a})\int_0^a x^{\frac{1}{2}}dx$



$= 4\sqrt{a}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a$

$= (4\sqrt{a})\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}a^2$ சதுர அலகுகள்

<u>கேள்வி 6.</u>

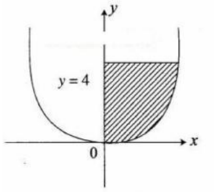
தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $y = 4x^2$ என்ற பரவளையம் , $x = 0, y = 0$ மற்றும் $y = 4$ எனும் கோடுகளுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட பரவளையம் $y = 4x^2 \Rightarrow \quad x^2 = \frac{y}{4}$

பரவளையமானது y-அச்சு பற்றிய சமச்சீராக உள்ளது முதல் கால்பகுதியில் பரப்பளவு தேவை.

பரப்பளவு $= \int_0^4 xdy = \int_0^4 \sqrt{\frac{y}{4}}dy$



$= \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{y}dy$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

$= \frac{1}{3}(4)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$ சதுர அலகுகள்

<u>கேள்வி 7.</u>

$y = x^2$ என்ற பரவளையத்திற்கும் $y = 4$ என்ற கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

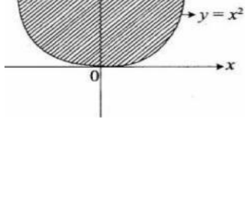
பரவளையம் $y = x^2$ மற்றும் கோடு $y=4$

பரவளையமானது y- அச்சைப் பற்றிய சமச்சீராக உள்ளது.

அதனால் , பரப்பளவு $= 2$ [$y=0$ மற்றும் $y=4$ வரம்புகளுக்கு இடையே உள்ள முதல் நாற்கரத்தில் பரப்பளவு]

$= 2\int_0^4 xdy$

$= 2\int_0^4 \sqrt{y}dy$



$= 2\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

$= \frac{4}{3}\cdot 8$

$= \frac{32}{3}$ சதுர அலகுகள்

பயிற்சி 3.2

<u>கேள்வி 3.</u>

ஒரு பொருளின் தேவை x அலகுகள் எனும் பொழுது விலை p -ஐ பொருத்த தேவை நெகிழ்ச்சி சார்பு $\frac{(4-x)}{x}$ எனில், விலை 4 மற்றும் பொருளின் தேவை 2 எனும் பொழுது தேவைச் சார்பு மற்றும் வருவாய் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$\eta_d = \frac{4-x}{x} \Rightarrow \quad \frac{-p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{4-x}{x}$

$\Rightarrow \frac{-dx}{4-x} = \frac{dp}{p} \quad \Rightarrow \int \frac{dx}{x-4} = \int \frac{dp}{p}$

$\log(x-4) = \log p + \log k = \log(pk) \Rightarrow x - 4 = pk$

$p = 4, x = 2 \Rightarrow 2 - 4 = 4k \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$

எனவே தேவை சார்பு $p = \frac{x-4}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = 8 - 2x$

வருவாய் சார்பு $R = px$

$\mathbf{R = 8x - 2x^2}$

<u>கேள்வி 4.</u>

ஒரு நிறுவனம் ,30 நாள்களுக்கு ஒருமுறை 500 இருசக்கர வாகனங்களை பெறுகிறது. அனுபவத்தில் சரக்கு கையிருப்பு. இருப்பு நாள்களுடன் (x) உடன் தொடர்புடையது என தெரிகிறது. கடைசியில் பெறப்பட்ட சரக்கு முதலில் இருந்து $I(x) = 500 - 0.03x^2$, தினசரி சரக்கு தேக்கச் செலவு ₹ 0.3 எனில் , 30 நாள்களுக்கான மொத்த தேக்கச் செலவைக் காண்க.

தீர்வு :

இங்கே சரக்கு சார்பு $I(x) = 500 - 0.03x^2$

அலகு வைத்திருக்கும் செலவு $C_1 = ₹\ 0.3$

$T = 30$ நாட்கள்

எனவே மொத்த சரக்கு சுமந்து செல்லும் செலவு

$= C_1\int_0^T I(x)dx \quad = 0.3\int_0^{30}(500 - 0.03x^2)dx$

$= 0.3\left(500x - \frac{0.03x^3}{3}\right)_0^{30}$

$= 0.3\left[500(30) - \frac{0.03}{3}(30)^3\right]$

$= 0.3[15000 - 270] = 4419$

30 நாட்களுக்கு சரக்குகளை பராமரிப்பதற்கான மொத்த செலவு ₹4,419.

<u>கேள்வி 5.</u>

ஒரு வங்கியானது, வங்கி கணக்கில் உள்ள தொகைக்கு ஆண்டு 5 % கூட்டு வட்டி வீதத்தில் வட்டியை அளிக்கின்றது எனில், ஒவ்வொரு ஆண்டுக்கும் ₹1000 செலுத்தும் நபர் ஒருவருக்கு 5 ஆண்டுகளுக்கு கிடைக்கும் தொகை எவ்வளவு . ($e^{0.25} = 1.284$)

தீர்வு :

$p = 1000, N = 5, r = 5\% = 0.05$

"ஆண்டுத்தொகை" $= \int_0^5 1000e^{0.05t}dt$

$= \frac{1000}{0.05}\left(e^{0.05t}\right)_0^5$

$= 20000\left[e^{0.25} - e^0\right]$

$= 20000(1.284 - 1] = 5680$

5 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு ₹ 5680 வங்கி கணக்கில் இருக்கும்

கேள்வி 6.

உற்பத்தி செய்யப்படும் x அலகு பொருட்களின் இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு $\frac{dC}{dx}$ = 100 −10x + 0.1x^2 என்க . அந்நிறுவனத்தின் மாறாச் செலவு ₹500 எனில், அந்த நிறுவனத்தின் மொத்த செலவு சார்பு மற்றும் சராசரி செலவு ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு :

இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு $MC = \frac{dc}{dx} = 100 - 10x + 0.1x^2$

செலவு சார்பு $C = \int MCdx + k \Rightarrow \mathbf{C = \int(100 - 10x + 0.1x^2)dx + k}$

$C = 100x - 5x^2 + \frac{0.1x^3}{3} + k$

மாறாச் செலவு $500 \Rightarrow k = 500$

எனவே மொத்த செலவு சார்பு $= 100x - 5x^2 + \frac{0.1x^3}{3} + 500$

சராசரி செலவு சார்பு $AC = \frac{c}{x} = 100 - 5x + \frac{x^2}{30} + \frac{500}{x}$

கேள்வி 7.

இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு MC = 300$x^{\frac{2}{5}}$ மற்றும் மாறாச் செலவு 0 எனில் மொத்த செலவு மற்றும் சராசரி செலவு சார்பைக் காண்க .

தீர்வு :

இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு $MC = 300x^{\frac{2}{5}}$

செலவு சார்பு $C = \int 300x^{\frac{2}{5}}dx + k = 300\frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + k$

$\Rightarrow C = \frac{1500}{7}x^{\frac{7}{5}}$ [**மாறாச் செலவு k = 0]**

சராசரி செலவு $= \frac{C}{x} = \frac{1500}{7}x^{\frac{2}{5}}$

கேள்வி 8.

உற்பத்தி செய்யப்படும் x அலகுப பொருட்களின் இறுதிநிலைச் செலவு $\frac{a}{\sqrt{ax+b}}$ என்க , x=0 எனும் பொழுது உற்பத்தி செலவு 0 எனில் மொத்த செலவுச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு :

இறுதிநிலைச் செலவு $MC = \frac{a}{\sqrt{ax+b}}$

மொத்த செலவு$= \int \frac{a}{\sqrt{ax+b}}dx + k \Rightarrow \quad C = 2\sqrt{ax+b} + k$

வெளியீட்டின் விலை பூஜ்ஜியம்$\Rightarrow x = 0, C = 0$

$0 = 2\sqrt{b} + k \Rightarrow k = -2\sqrt{b}$

அதனால் மொத்த செலவு சார்பு $2\sqrt{ax+b} - 2\sqrt{b}$

கேள்வி 10.

விற்பனை செய்யப்படும் x அலகு பொருள்களின் இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு 5 + 3$e^{-0.03x}$ எனில் ,விற்பனை செய்யப்படும் 100 அலகு பொருள்களின் மொத்த வருவாய் தோராயமாக காண்க.(e^{-3} = 0.05)

தீர்வு :

இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $R''(x) = 5 + 3e^{-0.03x}$

100 யூனிட் விற்பனையின் மொத்த வருவாய்

$R = \int_0^{100} (5 + 3e^{-0.03x})dx$

$R = \left[5x + \frac{3e^{-0.03x}}{-0.03}\right]_0^{100}$ $R = \left(500 + \frac{3e^{-0.03(100)}}{-0.03}\right) - \left(0 - \frac{3}{0.03}\right)$

$R = 500 - 100e^{-3} + 100$

$R = 600 - 100(0.05) = 595$

மொத்த வருவாய் $= 595 \times 1000 =$ ₹5,95,000

கேள்வி 12.

இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $\frac{4}{(2x+3)^2} - 1$ எனில் , சராசரி வருவாய் சார்பு $P = \frac{4}{6x+9} - 1$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $MR = \frac{4}{(2x+3)^2} - 1$

$\Rightarrow R = \int \frac{4}{(2x+3)^2}dx - \int dx = \frac{-2}{(2x+3)} - x + k$

$R = 0$ என்பதால் $x = 0$

$0 = \frac{2}{-3} + k \Rightarrow k = \frac{2}{3} \Rightarrow R = \frac{-2}{2x+3} - x + \frac{2}{3}$

சராசரி வருவாய் சார்பு $P = \frac{R}{x}$

$P = \frac{-2}{x(2x+3)} - 1 + \frac{2}{3x} = \frac{2}{x}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2x+3}\right] - 1 = \frac{2}{x}\left[\frac{2x+3-3}{3(2x+3)}\right] - 1$

$= \frac{2}{x}\left(\frac{2x}{3(2x+3)}\right) - 1 = \frac{4}{6x+9} - 1$

இது தேவையான தீர்வு.

கேள்வி 13.

ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு MR = 20$e^{-x/10}\left(1 - \frac{x}{10}\right)$ எனில், அதன் தேவைச் சார்பை காண்க.

தீர்வு :

$MR = 20e^{\frac{-x}{10}}\left(1 - \frac{x}{10}\right)$ $\quad [\int \mathbf{e^x [f(x) + f'(x)) dx = e^x [f(x) + c}\}$

$R = \int 20e^{\frac{-x}{10}}\left(1 - \frac{x}{10}\right)dx + k = 20\int \left(e^{\frac{-x}{10}} - \frac{x}{10}e^{\frac{-x}{10}}\right)dx + k$

$R = 20\int d\left(xe^{\frac{-x}{10}}\right) + k = 20xe^{\frac{-x}{10}} + k$

$x = 0, R = 0,$ அதனால் $k = 0$

வருவாய் சார்பு $R = 20xe^{\frac{-x}{10}}$

தேவை சார்பு $P = \frac{R}{x} = 20e^{\frac{-x}{10}}$

கேள்வி 15.

இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு R'(x) = 1500 − 4x − 3x^2 எனில் , வருவாய் சார்பு மற்றும் சராசரி வருவாய் சார்பைக் காண்க

தீர்வு :

இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு: $MR = R'(x) = 1500 - 4x - 3x^2$

வருவாய் சார்பு $R(x) = \int R'(x)dx + c$

$R = \int(1500 - 4x - 3x^2)dx + c$

$R = 1500x - 2x^2 - x^3 + c$

$x = 0, R = 0 \Rightarrow c = 0$

அதனால்வருவாய் சார்பு $R = 1500x - 2x^2 - x^3$

சராசரி வருவாய் சார்பு $P = \frac{R}{x} \Rightarrow 1500 - 2x - x^2$

கேள்வி 16.

x அலகு பொருட்களுக்கான இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு MR= 10 + 3x − x^2 எனில் வருவாய்ச் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு $MR = 10 + 3x - x^2$

வருவாய்ச் சார்பு $R(x) = \int (MR)dx + k$

$R = \int (10 + 3x - x^2)dx + k = 10x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + k$

$x = 0, R = 0, \Rightarrow k = 0$

$R = 10x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}$

தேவைச் சார்பு $P = \frac{R}{x} = 10 + \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{3}$

கேள்வி 19.

MR =20 – 5x + 3x² எனில் , மொத்த வருவாய்ச் சார்பு காண்க.

தீர்வு :

$MR = 20 - 5x + 3x^2$

$R = \int (MR)dx + k = \int (20 - 5x + 3x^2)dx + k$

$R = 20x - \frac{5x^2}{2} + x^3 + k$ [R = 0, என்பதால் x = 0, k = 0]

⇒ மொத்த வருவாய் சார்பு $R = 20x - \frac{5x^2}{2} + x^3$

கேள்வி 20.

MR = 14 – 6x + 9x² எனில் , தேவைச் சார்பு காண்க.

தீர்வு : $MR = 14 - 6x + 9x^2$

$R = \int (14 - 6x + 9x^2)dx + k = 14x - 3x^2 + 3x^3 + k$

, x = 0, k = 0 என்பதால் R = 0

அதனால் வருவாய்ச் சார்பு $R = 14x - 3x^2 + 3x^3$

தேவைச் சார்பு$P = \frac{R}{x} = 14 - 3x + 3x^2$

பயிற்சி- 3.3

கேள்வி 1.

தேவைச்சார்பு p = 50 – 2x எனில் , தேவை x=20 எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது தேவைச்சார்பு $p = 50 - 2x$, $x_0 = 20$

$CS = \int_0^{x_0} p(x)dx - x_0p_0$

$x = 20, p_0 = 50 - 2(20) = 10$

$CS = \int_0^{20} (50 - 2x)dx - (20)(10)$

$= [50x - x^2]_0^{20} - 200 = [1000 - 400] - 200 = 400$

எனவே நுகர்வோரின் உபரி 400 அலகுகளாகும்.

கேள்வி 2.

தேவைச்சார்பு p = 122 – 5x – 2x² மற்றும் x= 6 எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவைச்சார்பு $p = 122 - 5x - 2x^2$ மற்றும் $x = 6$

$x = x_0 = 6$

$p_0 = 122 - 5(6) - 2(36) = 122 - 30 - 72 = 20$

$CS = \int_0^6 (122 - 5x - 2x^2)dx - (20)(6)$

$= \left[122x - \frac{5x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^6 - 120 = (122)(6) - \frac{5}{2}(36) - \frac{2}{3}(216) - 120$

$= 732 - 90 - 144 - 120 = 378$

எனவே நுகர்வோரின் உபரி 378 அலகுகள்

கேள்வி 3.

தேவைச் சார்பு p = 85 – 5x மற்றும் அளிப்புச் சார்பு p = 3x – 35 , சமநிலை விலை மற்றும் சமநிலை அளவைக் காண்க மற்றும் நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க.

தீர்வு :

$p_d = 85 - 5x$ மற்றும் $p_s = 3x - 35$

சமநிலை விலையில் $p_d = p_s$

$85 - 5x = 3x - 35 \Rightarrow 8x = 120 \Rightarrow x = 15$

$p_0 = 85 - 5(15) = 85 - 75 = 10$

$CS = \int_0^{x_0} pdx - x_0p_0, x_0 = 15$

$CS = \int_0^{15} (85 - 5x)dx - (15)(10)$

$= \left(85x - \frac{5x^2}{2}\right)_0^{15} - 150 = 85(15) - \frac{5(225)}{2} - 150 = 562.5$

சமநிலை விலை ₹10, தேவை அளவு 15 . நுகர்வோர் உபரி 562.50 அலகுகள்.

கேள்வி 4.

உற்பத்தி பொருள்களின் தேவைச் சார்பு p = e⁻ˣ , p = 0.5 எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க

தீர்வு :

தேவைச்சார்பு $p = e^{-x}$

$p = 0.5$, (i.e) $p_0 = 0.5$; $p_0 = e^{-x_0} \Rightarrow 0.5 = e^{-x_0}$

இருபுறமும் $\log_e$ ஐ எடுத்துக்கொள்வது

$\log_e(0.5) = -x_0 \Rightarrow \log_e\left(\frac{1}{2}\right) = -x_0 \Rightarrow -\log_e 2 = -x_0$

$\Rightarrow x_0 = \log_e 2$

$CS = \int_0^{\log_e 2} e^{-x}dx - (\log_e 2)(0.5) = [-e^{-x}]_0^{\log_e 2} - \frac{\log_e 2}{2}$

$= \frac{-1}{2} + 1 - \frac{\log_e 2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\log_e 2}{2}$

$CS = \frac{1}{2}[1 - \log_e 2]$ அலகுகள்

கேள்வி 5.

அளிப்புச் சார்பு p = 7 + x , x = 5 எனும் போது உற்பத்தியாளர் உபரியைக் காண்க.

தீர்வு : அளிப்புச் சார்பு $p = 7 + x, x_0 = 5$

$p_0 = 7 + x_0 = 7 + 5 = 12$

$PS = x_0p_0 - \int_0^{x_0} p(x)dx = 5(12) - \int_0^5 (7 + x)dx$

$= 60 - \left(7x + \frac{x^2}{2}\right)_0^5 = 60 - 35 - \frac{25}{2} = \frac{25}{2}$

எனவே தயாரிப்பாளரின் உபரி $\frac{25}{2}$ அலகுகள்

கேள்வி 6.

விற்பனை பொருள்களின் அளிப்புச் சார்பு p = 3x + 5x² , x = 4 எனும்போது உற்பத்தியாளரின் உபரியைக் காண்க .

தீர்வு : அளிப்புச் சார்பு $p_s = 3x + 5x^2$, $x = 4$, (i.e) $x_0 = 4$,

$p_0 = 3(4) + 5(4)^2 = 12 + 80 = 92$

$PS = x_0p_0 - \int_0^{x_0} p_s(x)dx$

$= 4(92) - \int_0^4 (3x + 5x^2)dx = 368 - \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{5x^3}{3}\right]_0^4$

$= 368 - \left[\frac{48}{2} + \frac{5}{3}(64)\right] = 368 - 24 - 106.67 = 237.33$

உற்பத்தியாளரின் உபரி 237.3 அலகுகள்.

கேள்வி 7.

விற்பனை பொருள்களின் தேவைச் சார்பு $p = \frac{36}{x+4}$ க்கு , சந்தை விலை 6 எனும் போது நுகர்வோர் உபரியைக் காண்க .

தீர்வு :

தேவைச் சார்பு $p = \frac{36}{x+4}$

சந்தை விலை ₹ 6 (i.e) $p_0 = 6$

$p_0 = \frac{36}{x_0 + 4} \Rightarrow 6 = \frac{36}{x_0 + 4} \Rightarrow x_o = 2$

$CS = \int_0^2 \left(\frac{36}{x+4}\right)dx - p_0x_0 = 36\int_0^2 \left(\frac{1}{x+4}\right)dx - (6)(2)$

$= 36[\log(x + 4)]_0^2 - 12 = 36[\log 6 - \log 4] - 12 = 36\log\frac{3}{2} - 12$

அதனால் தற்போதைய சந்தை விலை ₹ 6 ஆக இருக்கும் போது நுகர்வோரின் உபரி $\left(36\log\frac{3}{2} - 12\right)$ அலகுகள்.

கேள்வி 8.

சரியான போட்டியின் கீழ் ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகள் முறையே $p_d = 1600 - x^2$ மற்றும் $p_s = 2x^2 + 400$ எனில் , உற்பத்தியாளரின் உபரியைக் காண்க .

தீர்வு :

தேவைச்சார்பு $p_d = 1600 - x^2$ மற்றும்

அளிப்பு சார்பு $p_S = 2x^2 + 400$

$p_s = p_d \Rightarrow 1600 - x^2 = 2x^2 + 400 \Rightarrow 3x^2 = 1200$

$\Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = \pm 20$

அதனால் $x = 20$

$x_0 = 20. \Rightarrow p_0 = 1600 - (20)^2 = 1600 - 400 = 1200$

$PS = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} p_s dx = (20)(1200) - \int_0^{20} (2x^2 + 400)dx$

$= 24000 - \left[\frac{2x^3}{3} + 400x\right]_0^{20} = 24000 - \left[\frac{16000}{3} + 8000\right]$

$= 16000 - \frac{16000}{3} = \frac{32000}{3}$.

தயாரிப்பாளரின் உபரி $\frac{32000}{3}$ அலகுகள்.

5 -மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 3.2

கேள்வி 2.

ஒரு நிகழ்ச்சி சார்பு $\frac{Ey}{Ex}$ என்பது $\frac{Ey}{Ex} = \frac{-7x}{(1-2x)(2+3x)}$ என வரையறுக்கப்படின் எனும் பொழுது அச்சார்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$\eta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{-7x}{(1-2x)(2+3x)} \Rightarrow \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-7x}{(1-2x)(2+3x)}$

$\frac{dy}{y} = \frac{-7x}{(1-2x)(2+3x)}\frac{dx}{x}$

$\int \frac{dy}{y} = 7\int \frac{dx}{(2x-1)(3x+2)}$ ------(1)

$\frac{1}{(2x-1)(3x+2)} = \frac{A}{(2x-1)} + \frac{B}{(3x+2)}$

$1 = A(3x+2) + B(2x-1)$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = A\left(\frac{3}{2} + 2\right)$

$1 = A\left(\frac{7}{2}\right) \Rightarrow A = \frac{2}{7}$

$x = \frac{-2}{3} \Rightarrow 1 = B\left[2\left(\frac{-2}{3}\right) - 1\right]$

$1 = B\left(\frac{-4}{3} - 1\right)$

$1 = B\left(\frac{-7}{3}\right) \Rightarrow B = \frac{-3}{7}$

(1) இல் இந்த மதிப்புகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்

$\int \frac{dy}{y} = 7\int \frac{\frac{2}{7}}{2x-1}dx - 7\int \frac{\frac{3}{7}}{3x+2}dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{2x-1} - \int \frac{3dx}{3x+2}$

$\log y = \log(2x-1) - \log(3x+2) + \log k$

$y = \left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)k$

$x = 2, y = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{3}{8}k$

$\Rightarrow k = 1$

எனவே சார்பு , $y = \frac{2x-1}{3x+2}$

கேள்வி 14.

ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்தி பொருள்களின் இறுதிநிலை செலவு சார்பு $C'(x) = 5 + 0.13x$, இறுதிநிலை வருவாய் சார்பு $R'(x) = 18$ மற்றும் மாறாச் செலவு ₹120 எனில், இலாபச் சார்பைக் காண்க .

தீர்வு :

$MC = C'(x) = 5 + 0.13x$

$C(x) = \int C'(x)dx + k_1 = \int (5 + 0.13x)dx + k_1 = 5x + \frac{0.13}{2}x^2 + k_1$

உற்பத்தியின் அளவு பூஜ்ஜியமாக இருக்கும்போது,

நிலையான செலவு 120 ஆகும்

(i.e) $x = 0, C = 120 \Rightarrow k_1 = 120$

செலவு சார்பு $c(x) = 5x + 0.065x^2 + 120$

இப்போது கொடுக்கப்பட்டது $MR = R'(x) = 18$

$\Rightarrow R(x) = \int 18dx + k_2 = 18x + k_2$

$x = 0, R = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

வருவாய் $R(x) = 18x$

லாபம் P= மொத்த வருவாய் - மொத்த செலவு

$= 18x - (5x + 0.065x^2 + 120)$

இலாபச் சார்பு $= 13x - 0.065x^2 - 120$

கேள்வி 17.

உற்பத்தி பொருள்களின் இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு MC = $\frac{14000}{\sqrt{7x+4}}$ மற்றும் மாறாச் ₹18,000 எனில், மொத்தச் செலவு மற்றும் சராசரி செலவுக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது MC = $\frac{14000}{\sqrt{7x+4}}$

நிலையான செலவு = ₹18,000

மொத்த செலவு $= \int (MC)dx + k = \int \frac{14000}{\sqrt{7x+4}}dx + k$

$= 14000\left(\frac{2}{7}\sqrt{7x+4}\right) + k = 4000\sqrt{7x+4} + k$

நிலையான செலவு ₹18,000 என்பதால்,

x=0,k=18,000

மொத்த செலவு $= 4000\sqrt{7x+4} + 18000$

சராசரி செலவு A.C $= \frac{C}{x}$

$= \frac{4000}{x}\sqrt{7x+4} + \frac{18000}{x}$

கேள்வி 18.

ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்தி பொருள்களின் (x) இறுதிநிலைச் செலவு உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருள்களின் எண்ணிக்கைக்கு நேர் விகிதத்தில் உள்ளது. மேலும், மாறாச் செலவு ₹5000 மற்றும் 50 அலகு பொருள்களின் உற்பத்தி செலவு ₹5,625 எனில் , மொத்தச் செலவைக் காண்க .

தீர்வு :

இறுதிநிலைச் செலவு MC என்பது அலகுகளின் எண்ணிக்கை x க்கு நேர் விகிதாசாரமாகும்.

அதாவது, $MC \propto x$

$MC = kx$, இதில் k என்பது விகிதாச்சாரத்தின் மாறிலி

மொத்த செலவு $C = \int (MC)dx + c_1 = \int (kx)dx + c_1$

$$C = \frac{kx^2}{2} + c_1$$

மாறாச் செலவு = $5000 \Rightarrow c_1 = 5000$

$C = \frac{kx^2}{2} + 5000$

$x = 50, C = 5625 \Rightarrow 5625 = \frac{k}{2}(50)^2 + 5000 \Rightarrow 625 = \frac{2500}{2}k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

எனவே மொத்த செலவு சார்பு $C = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + 5000$

$C = \frac{x^2}{4} + 5000$

பயிற்சி 3.3

கேள்வி 9.

சரியான போட்டியின் கீழ் ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகள் முறையே $p_d = \frac{8}{x+1} - 2$, $p_s = \frac{x+3}{2}$ எனில், நுகர்வோர் மற்றும் உற்பத்தியாளரின் உபரியைக் காண்க .

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது $p_d = \frac{8}{x+1} - 2$ மற்றும் $p_s = \frac{x+3}{2}$

இங்கே, சரியான போட்டி இருப்பதால், சமநிலை உள்ளது, அதாவது $p_d = p_s$

$\frac{8}{x+1} - 2 = \frac{x+3}{2} \Rightarrow \frac{8-2x-2}{x+1} = \frac{x+3}{2} \Rightarrow \frac{6-2x}{x+1} = \frac{x+3}{2}$

$(x+1)(x+3) = 12 - 4x \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 12 - 4x$

$x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow (x+9)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -9, 1$

x இன் மதிப்பு குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது என்பதால், x=1 [x_0 ஆக எடுத்துக்கொள்கிறோம்]

$p_0 = \frac{8}{x_0+1} - 2 = \frac{8}{2} - 2 = 2$

$CS = \int_0^1 p_d dx - x_0 p_0 = \int_0^1 \left(\frac{8}{x+1} - 2\right)dx - (1)(2)$

$= [8\log(x+1) - 2x]_0^1 - 2 = 8\log 2 - 2 - (8\log 1 - 0) - 2$

$= 8\log 2 - 4$

$PS = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} p_s dx$

$= 2 - \int_0^1 \frac{x+3}{2} dx = 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)_0^1 = 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 3\right) = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$

எனவே சரியான போட்டியின் கீழ்,

(i) நுகர்வோரின் உபரி (8 log 2 – 4) அலகுகள்

(ii) தயாரிப்பாளரின் உபரி $\frac{1}{4}$ அலகுகள்

கேள்வி 10.

உற்பத்தி பொருள்களின் தேவை சமன்பாடு $x = \sqrt{100 - p}$ மற்றும் அளிப்பு சமன்பாடு $x = \frac{P}{2} - 10$ எனில் , சந்தையில் சமநிலையில் கீழ் உற்பத்தியாளர் மற்றும் நுகர்வோரின் உபரியைக் காண்க .

தீர்வு :

தேவை சமன்பாடு $x = \sqrt{100 - p} \Rightarrow x^2 = 100 - p$

$\Rightarrow p_d = 100 - x^2$

அளிப்பு சமன்பாடு $x = \frac{p}{2} - 10. \Rightarrow x + 10 = \frac{p}{2}$

$\Rightarrow p_s = 2(x + 10)$

சமநிலையின் கீழ் $p_d = p_s$

$\Rightarrow 100 - x^2 = 2(x+10) \Rightarrow 100 - x^2 = 2x + 20$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 80 = 0 \Rightarrow (x+10)(x-8) = 0 \Rightarrow x = -10, 8$

x இன் மதிப்பு குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது,

அதனால் $x = 8$

$x_0 = 8, p_0 = 100 - 8^2 = 100 - 64 = 36$

$CS = \int_0^8 (100 - x^2)dx - (8)(36)$

$= \left(100x - \frac{x^3}{3}\right)_0^8 - 288 = 800 - \frac{512}{3} - 288 = \frac{1024}{3}$

அதனால் நுகர்வோர் உபரி= $\frac{1024}{3}$ அலகுகள்

$PS = 8(36) - \int_0^8 2(x+10)dx$

$= 288 - 2\left(\frac{x^2}{2} + 10x\right)_0^8$

$= 288 - 2\left(\frac{64}{2} + 80\right) = 288 - 2(112) = 64$

அதனால் தயாரிப்பாளரின் உபரி 64 அலகுகள்.

கேள்வி 11.

தேவைச் சார்பு p_d = 25 – 3x மற்றும் அளிப்புச் சார்பு p_s = 5 + 2x. எனில் , சமன்நிலையில் நுகர்வோர் உபரி மற்றும் உற்பத்தியாளர் உபரியைக் காண்க .

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது $p_d = 25 - 3x$ மற்றும் $p_S = 5 + 2x$

சந்தை சமநிலையில், $p_d = p_S$

$\Rightarrow 25 - 3x = 5 + 2x$

$\Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$

$x_0 = 4, p_0 = 25 - 12 = 13$

$CS = \int_0^4 (25 - 3x)dx - 13(4) = \left(25x - \frac{3x^2}{2}\right)_0^4 - 52$

$= 100 - \frac{3}{2}(16) - 52 = 24$

அதனால் நுகர்வோரின் உபரி 24 அலகுகள்.

$PS = 13(4) - \int_0^4 (2x + 5)dx$

$= 52 - (x^2 + 5x)_0^4 = 52 - 16 - 20 = 16$

அதனால் தயாரிப்பாளரின் உபரி 16 அலகுகள்.

அத்தியாயம் - 5

எண்ணியல் முறைகள்

(2, 3 , 5 மதிப்பெண்கள்)

2 - மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி - 5.1

கேள்வி 1.

மதிப்பிடுக: $\Delta(\log ax)$

தீர்வு :

$\mathbf{\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)}$

$\Delta \log ax = \log a(x+h) - \log ax = \log\left[\frac{a(x+h)}{ax}\right] = \log\left(1+\frac{h}{x}\right)$

பயிற்சி 5.2

கேள்வி 1.

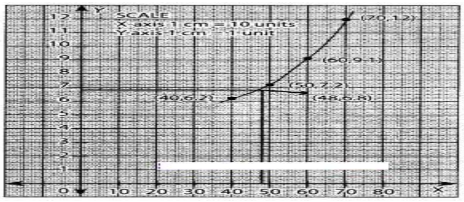
வரைபட முறையைப் பயன்படுத்தி x =48 எனில் பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து y -ன் மதிப்பைக் காண்க:

x	40	50	60	70
y	6.2	7.2	9.1	12

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் (40,6.2),(50,7.2)(60,9.1) மற்றும் (70,12).

பொருத்தமான அளவோடு ஒரு வரைபடத்தில் புள்ளிகளை குறிக்கின்றோம்



x = 48 ஆக இருக்கும் போது y இன் மதிப்பு 6.8 ஆகும்

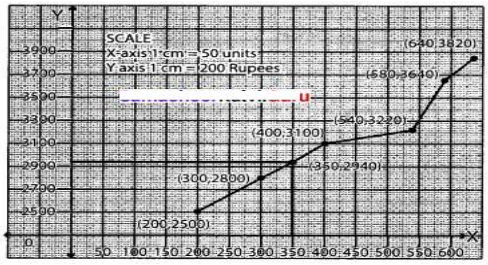
கேள்வி 2.

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து 350 அலகுகளில் ஏற்படக்கூடிய செலவினத்தை வரைபட முறையைப் பயன்படுத்தி காண்க.

மாதம்	Jan	Feb	Mar	Apr	May	June
வெளியீடு அலகுகள்	200	300	400	640	540	580
மறைமுக உழைப்பூதியச் செலவினம்	2500	2800	3100	3820	3220	3640

தீர்வு :

வெளியீட்டின் அலகுகளை x- அச்சில், உழைப்புச் செலவுகளை y- அச்சில் எடுத்துக் கொள்ளுங்கள். திட்டமிடப்பட வேண்டிய புள்ளிகள் (200,2500), (300,2800)(400,3100), (640,3820), (540,3220), (580, 3640)



வரைபடத்தில் இருந்து, 350 அலகுகள் வெளியீட்டில் செலவுகள் ₹ 2940 ஆகும்.

---

3 - மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 5.1

கேள்வி 2.

$y = x^3 - x^2 + x - 1$ எனில் x = 0,1,2,3,4,5 என்பனவற்றுக்கு y-ன் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக முன்நோக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணையை அமைக்க .

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது $y = x^3 - x^2 + x - 1$

$x = 0, y = 0 - 0 + 0 - 1 = -1$

$x = 1, y = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

$x = 2, y = 8 - 4 + 2 - 1 = 5$

$x = 3, y = 27 - 9 + 3 - 1 = 20$

$x = 4, y = 64 - 16 + 4 - 1 = 51$

$x = 5, y = 125 - 25 + 5 - 1 = 104$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	−1					
		1				
1	0		4			
		5		6		
2	5		10		0	
		15		6		0
3	20		16		0	
		31		6		
4	51		22			
		53				
5	104					

கேள்வி 3.

h = 1 எனில் $(E^{-1}\Delta)x^3 = 3x^2 - 3x + 1$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$h = 1$

நிரூபிக்க$\mathbf{(E^{-1}\Delta)x^3 = 3x^2 - 3x + 1}$

L.H.S : $(E^{-1}\Delta)x^3 = E^{-1}(\Delta x^3)$

$= E^{-1}[(x+h)^3 - x^3] = E^{-1}(x+h)^3 - E^{-1}(x^3)$

$= (x - h + h)^3 - (x-h)^3 = x^3 - (x-h)^3$

$h = 1$

$(E^{-1}\Delta)x^3 = x^3 - (x-1)^3 = x^3 - [x^3 - 3x^2 + 3x - 1]$

$= 3x^2 - 3x + 1 =$ RHS

கேள்வி 4.

f (x) = x^2 + 3x மற்றும் h = 1 எனில் $\Delta f(x) = 2x + 4$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$f(x) = x^2 + 3x$

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 + 3(x+h) - x^2 - 3x$

$= x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h - x^2 - 3x = 2xh + 3h + h^2$

$h = 1, \ \Delta f(x) = 2x + 4$

கேள்வி 5.

h = 1 எனில், $\Delta\left[\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$ **-ஐ மதிப்பிடுக.**

தீர்வு :

$\Delta\left[\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right], \quad h = 1$

பகுதி பின்னம் மூலம்

$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$

$A = 1, \quad B = -1$

அதனால் $\Delta\left[\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right] = \Delta\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right] = \Delta\left(\frac{1}{x+1}\right) - \Delta\left(\frac{1}{x+2}\right)$

$= \left[\frac{1}{x+1+1} - \frac{1}{x+1}\right] - \left[\frac{1}{x+1+2} - \frac{1}{x+2}\right]$

$= \left[\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right] - \left[\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2}\right]$

$= \left[\frac{-1}{(x+2)(x+1)}\right]\left[\frac{1}{(x+3)(x+2)}\right] = \frac{-1}{(x+2)}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right]$

$= \frac{-2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

கேள்வி 6 :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி விடுபட்ட உறுப்பைக் காண்க.

x	0	1	2	3	4
y_x	1	3	9	-	81

தீர்வு : 4 மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டதால் ,

$\Delta^4 y_0 = 0, \Rightarrow \ \therefore (E-1)^4 y_0 = 0$

$(E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1)y_0 = 0$

$E^4y_0 - 4E^3y_0 + 6E^2y_0 - 4Ey_0 + y_0 = 0$

$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$

$y_0 = 1, y_1 = 3, y_2 = 9, y_4 = 81$

அதனால் , $81 - 4y_3 + 6(9) - 4(3) + 1 = 0$

$81 - 4y_3 + 54 - 12 + 1 = 0$

$4y_3 = 124 \ \Rightarrow y_3 = 31$

கேள்வி 7.

ஒரு மாவட்டத்தின் மக்கள்த் தொகை விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு (x)	1881	1891	1901	1911	1921	1931
மக்கள்தொகை (y) (ஆயிரத்தில்)	363	391	421	-	467	501

1911 ம் ஆண்டிற்கான மக்கள் தொகையைக் காண்க.

தீர்வு :

$y_0 = 363, y_1 = 391, y_2 = 421, y_4 = 467$ **மற்றும்** $y_5 = 501$

$\Delta^5 y_0 = 0, \Rightarrow \ (E-1)^5 y_0 = 0$

$E^5y_0 - 5E^4y_0 + 10E^3y_0 - 10E^2y_0 + 5Ey_0 - y_0 = 0$

$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0 = 0$

$501 - 5(467) + 10y_3 - 10(421) + 5(391) - 363 = 0$

$501 - 2335 + 10y_3 - 4210 + 1955 - 363 = 0$

$-501 + 2335 + 4210 - 1955 + 363 = 10y_3$

$10y_3 = 4452 \Rightarrow \ y_3 = 445.2$

1911 ஆம் ஆண்டின் மக்கள் தொகை 445 ஆயிரம்

பயிற்சி 5.2

கேள்வி 3. நியூட்டனின் முன்நோக்கு இடைச்செருகலின் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி முப்படி பல்லுறுப்பு கோவையைக் காண்க.

X	0	1	2	3
f(x)	1	2	1	10

தீர்வு : நியூட்டனின் முன்னோக்கி இடைக்கணிப்பு சூத்திரம்

$$\mathbf{y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots}$$

x	Y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1			
		1		
1	2		-2	
		-1		12
2	1		10	
		9		
3	10			

$x_0 + nh = x. \ x_0 = 0, h = 1 \Rightarrow \ n = x$

$y(x) = 1 + \frac{x}{1!}(1) + \frac{x(x-1)}{2!}(-2) + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}(12)$

$y(x) = 1 + x - (x^2 - x) + 2[x^3 - 3x^2 + 2x]$

$y(x) = 1 + x - x^2 + x + 2x^3 - 6x^2 + 4x$

$\mathbf{f(x) = y = 2x^3 - 7x^2 + 6x + 1}$ தேவையான கன பல்லுறுப்புக்கோவை ஆகும்

கேள்வி 4.

10 வருடங்களுக்கு ஒருமுறை எடுக்கப்படும் ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை கணக்கெடுப்பின் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. 1955 வருடத்தின் மக்கள் தொகையை மதிப்பிடுக.

வருடம்	1951	1961	1971	1981
மக்கள்தொகை (இலட்சத்தில்)	35	42	58	84

தீர்வு :

x	1951	1961	1971	1981
y	35	42	58	84

$$\mathbf{y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots}$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1951	**35**			
		7		
1961	**42**		**9**	
		16		**1**
1971	**58**		**10**	
		26		
1981	**84**			

இப்போது $x = 1955, x_0 = 1951; \ h = 10$

$\Rightarrow n = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1955-1951}{10} = \frac{4}{10} = 0.4$

$\Rightarrow n - 1 = 0.4 - 1 = -0.6; \quad n - 2 = 0.4 - 2 = -1.6$

$y_{(x=1955)} = 35 + \frac{0.4}{1!}(7) + \frac{(0.4)(-0.6)}{2!}(9) + \frac{(0.4)(-0.6)(-1.6)}{3!}(1)$

$= 35 + 2.8 + \frac{(0.4)(-0.6)(9)}{2} + \frac{(0.4)(-0.6)(-1.6)}{6}$

$= 37.8 - 1.08 + 0.064 = 36.784$

இவ்வாறு 1955 ஆம் ஆண்டில் மதிப்பிடப்பட்ட மக்கள் தொகை 36.784 லட்சம்

5 - மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 5.1

கேள்வி 8.

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்டு விடுபட்ட உறுப்புகளைக் காண்க.

(x)	0	1	2	3	4	5
$y = f(x)$	0	$-$	8	15	$-$	35

தீர்வு :

$y_0 = 0\ , y_2 = 8, y_3 = 15, y_5 = 35$

4 மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டதால்

$\boldsymbol{\Delta^4 y_0 = 0}, \therefore (E-1)^4 y_0 = 0$

$(E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1)y_0 = 0$

$E^4y_0 - 4E^3y_0 + 6E^2y_0 - 4Ey_0 + y_0 = 0$

$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$

$\Rightarrow\ y_4 - 4(15) + 6(8) - 4y_1 + 0 = 0\ \Rightarrow\ y_4 - 4y_1 = 12$

$\boldsymbol{\Delta^4 y_1 = 0}\ \therefore (E-1)^4 y_1 = 0$

$E^4y_1 - 4E^3y_1 + 6E^2y_1 - 4Ey_1 + y_1 = 0$

$y_5 - 4y_4 + 6y_3 - 4y_2 + y_1 = 0$

கொடுக்கப்பட்டது $y_0 = 0, y_2 = 8, y_3 = 15, y_5 = 35$

$35 - 4y_4 + 6(15) - 4(8) + y_1 = 0$

$-4y_4 + y_1 = -35 - 90 + 32\ \Rightarrow -4y_4 + y_1 = -93 \Rightarrow\ 4y_4 - y_1 = 93$

(1) மற்றும் (2) தீர்ப்பதன் மூலம்

$(1) \times 4$

$4y_4 - 16y_1 = 48$

$4y_4 - y_1 = 93$

கழித்தல்,

$-15y_1 = -45 \Rightarrow y_1 = 3$

$y_1 = 3 \Rightarrow\ 4y_4 - 3 = 93\ \Rightarrow 4y_4 = 96 \Rightarrow y_4 = 24$

$y_1 = f(x_1) = 3$ மற்றும் $y_4 = f(x_4) = 24$

கேள்வி 5.

ஒரு தேர்வில் குறிப்பிட்ட இடைவெளிக்குள் மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

மதிப்பெண்கள்	0-19	20-39	40-59	60-79	80-99
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	41	62	65	50	17

70-க்கு குறைவான மதிப்பெண்கள் பெறும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

தீர்வு :

70க்கும் குறைவான மதிப்பெண்களை நாம் கண்டுபிடிக்க வேண்டியிருப்பதால், , மேலும் வகுப்பு இடைவெளியை தொடர்ச்சியான இடைவெளி மாற்ற வேண்டும்.

மதிப் பெண்கள் (x)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (y)	ஒட்டுமொத்த அதிர்வெண்
$-0.5 - 19.5$	41	41
$19.5 - 39.5$	62	103
$39.5 - 59.5$	65	168
$59.5 - 79.5$	50	218
$79.5 - 99.5$	17	235

வேறுபாடு அட்டவணை பின்வருமாறு

மதிப்பெண்கள் (x)	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
19.5 க்கும் குறைவானது	41				
		62			
39.5 க்கும் குறைவானது	103		3		
		65		-18	
59.5 க்கும் குறைவானது	168		-15		0
		50		-18	
79.5 க்கும் குறைவானது	218		-33		
		17			
99.5 க்கும் குறைவானது	235				

$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots$

$n = \frac{x - x_n}{h} = \frac{70 - 99.5}{20} = \frac{-30}{20} = -1.475$

n	n +1	n + 2
-1.475	-0.475	0.525

$y = 235 + (-1.475)(17) + \frac{(-1.475)(-0.475)}{2}(-33) + \frac{(-1.475)(-0.475)(0.525)}{6}(-18)$

$= 235 - 25.075 - 11.5603 - 1.1034 = 197.2$

எனவே 70க்கும் குறைவான மதிப்பெண்களைக் கொண்ட விண்ணப்பதாரர்களின் மதிப்பிடப்பட்ட மதிப்பு 197 ஆகும்

<u>கேள்வி 6.</u>

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையைக் கொண்டு x=32 எனில் f(x) ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	30	35	40	45	50
f(x)	15.9	14.9	14.1	13.3	12.5

தீர்வு :

$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ..$

வேறுபாடு அட்டவணை பின்வருமாறு

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
30	**15.9**				
		−1			
35	14.9		**0.2**		
		−0.8		**−0.2**	
40	14.1		0		**0.2**
		−0.8		0	
45	13.3		0		
		−0.8			
50	12.5				

$n = \frac{x - x_0}{h} = \frac{32 - 30}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$

n	n -1	n - 2	n - 3
0.4	-0.6	-1.6	-2.6

$y_{(x=x_0+nh)} = y_0 + \frac{n}{1!}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ...$

$y_{(x=32)} = 15.9 + \frac{0.4}{1!}(-1) + \frac{(0.4)(-0.6)}{2!}(0.2) + \frac{(0.4)(-0.6)(-1.6)}{3!}(-0.2) + \frac{(0.4)(-0.6)(-1.6)(-2.6)}{4!}(0.2)$

$y = 15.9 - 0.4 - 0.024 - 0.0128 - 0.00832$

$y = 15.45488$

எனவே x=32 15.45 ஆக இருக்கும் போது f(x) இன் மதிப்பு

<u>கேள்வி 7.</u>

உலோகம் மற்றும் துத்தநாகத்தில் உள்ள காரீயத்தின் உருகும் நிலை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 'T' என்பது வெப்பநிலை (பாகையில்) மற்றும் P என்பது உலோகத்தில் காரீயத்தின் சதவீதம்.

P	40	50	60	70	80	90
T	180	204	226	250	276	304

84 சதவீத காரீயம் கொண்ட உலோகத்தின் உருகும் நிலையைக் காண்க.

தீர்வு :

$t_{(p=p_n+nh)=t_n} + \frac{n}{1!}\nabla t_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 t_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 t_n + ...$

வேறுபாடு அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

p	t	∇t	$\nabla^2 t$	$\nabla^3 t$	$\nabla^4 t$	$\nabla^5 t$
40	180					
		24				
50	204		−2			
		22		4		
60	226		2		−4	
		24		0		**4**
70	250		2		**0**	
		26		**0**		
80	276		**2**			
		28				
90	**304**					

<u>இப்போது</u> $\Rightarrow n = \frac{x - x_n}{h} = \frac{84-90}{10} = \frac{-6}{10} = -0.6$

N	n +1	n + 2	n + 3	n + 4
- 0.6	**0.4**	**1.4**	**2.4**	**3.4**

$t_{(p=p_n+nh)=t_n} + \frac{n}{1!}\nabla t_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 t_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 t_n + ...$

$t_{(p=84)} = 304 + \frac{(-0.6)}{1!}(28) + \frac{(-0.6)(0.4)}{2!}(2) + \frac{(-0.6)(0.4)(1.4)}{3!}(0) + \frac{(-0.6)(0.4)(1.4))(2.4)}{4!}(0) + \frac{(-0.6)(0.4)(1.4))(2.4)(3.4)}{5!}(4)$

$t = 304 - 16.8 - 0.24 - 0.0914 = 286.8686$

<u>கேள்வி 8.</u>

கீழ்க்கண்ட அட்டவளையிலிருந்து f(2.8)-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	0	1	2	3
f(x)	1	2	11	34

தீர்வு :

x=2.8 ; $y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + ..$

வேறுபாடு அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
0	1			
		1		
1	2		8	
		9		6
2	11		14	
		23		
3	34			

$y_{(x=x_n+nh)} = y_n + \frac{n}{1!}\nabla y_n + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3 y_n + ..$

$x_n = 3, h = 1, x = 2.8$ & $n = \frac{x - x_n}{h} = \frac{2.8 - 3}{1} = \frac{-0.2}{1} = -0.2$

n	n +1	n + 2
-0.2	**0.8**	**1.8**

$y = 34 + \frac{(-0.2)}{1!}(23) + \frac{(-0.2)(0.8)}{2!}(14) + \frac{(-0.2)(0.8)(1.8)}{3!}(6)$

$y = 34 - 4.6 - 1.12 - 0.288 = 27.992$

எனவே x=2.8 இல் f(x) இன் மதிப்பு 27.992 ஆகும்

கேள்வி 9.

இடைச்செருகல் முறையைப் பயன்படுத்தி 1986-ஆம் வருடத்திற்கான தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியைக் காண்க.

வருடம்	1974	1978	1982	1990
உற்பத்தி (ஆயிரம் டன்களில்)	25	60	80	170

தீர்வு :

x ஆண்டைக் குறிக்கலாம் மற்றும் y **உற்பத்தி** குறிக்கும்.

x மதிப்புகள் சம தூரத்தில் இல்லை.

$\mathbf{y_0 = 25, y_1 = 60, y_2 = 80, y_3 = 170}$

x=1986 $\mathbf{y} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \times \mathbf{y_0} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\mathbf{y_1}$

$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \times \mathbf{y_2} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\mathbf{y_3}$

x	x_0	x_1	x_2	x_3
1986	1974	1978	1982	1990

$x - x_0$	1986 − 1974	12	$x_0 - x_1$	1974 − 1978	−4
$x - x_1$	1986 − 1978	8	$x_0 - x_2$	1974 − 1982	−8
$x - x_2$	1986 − 1982	4	$x_0 - x_3$	1974 − 1990	−16
$x - x_3$	1986 − 1990	−4	$x_1 - x_2$	1978 − 1982	−4
$x_2 - x_3$	1982 − 1990	−8	$x_1 - x_3$	1978 − 1990	−12

$$y = \frac{(8)(4)(-4)}{(-4)(-8)(-16)}(25) + \frac{(12)(4)(-4)}{(4)(-4)(-12)}(60) + \frac{(12)(8)(-4)}{(8)(4)(-8)}(80) + \frac{(12)(8)(4)}{(16)(12)(8)}(170)$$

$y = 6.25 - 60 + 120 + 42.5 = 108.75$

1986 இல் தொழிற்சாலையின் உற்பத்தி 109 (ஆயிரம் டன்)

கேள்வி 10.

கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து மாத வருமானம் ₹26-க்கு மிகாமல் பெறும் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கையை இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி காண்க.

வருமானம் மிகாமல் (₹)	15	25	30	35
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	36	40	45	48

தீர்வு :

x என்பது மாத வருமானத்தையும்,

y என்பது தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கையையும் குறிக்கும்.

$y_0 = 36, y_1 = 40, y_2 = 45, y_3 = 48$

y இன் மதிப்பை x=26 இல் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்

லாக்ரேஞ்சின் இடைக்கணிப்பு சூத்திரத்தால்,

$\mathbf{y} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \times \mathbf{y_0} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\mathbf{y_1}$

$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \times \mathbf{y_2} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\mathbf{y_3}$

x	x_0	x_1	x_2	x_3
26	15	25	30	35

$x - x_0$	26 − 15	11	$x_0 - x_1$	15 − 25	−10
$x - x_1$	26 − 25	1	$x_0 - x_2$	15 − 30	−15
$x - x_2$	26 − 30	−4	$x_0 - x_3$	15 − 35	−20
$x - x_3$	26 − 35	−9	$x_1 - x_2$	25 − 30	−5
$x_2 - x_3$	30 − 35	−5	$x_1 - x_3$	25 − 35	−10

$$y = \frac{(1)(-4)(-9)}{(-10)(-15)(-20)}(36) + \frac{(11)(-4)(-9)}{(10)(-5)(-10)}(40) + \frac{(11)(1)(-9)}{(15)(5)(-5)}(45) + \frac{(11)(1)(-4)}{(20)(10)(5)}(48)$$

$y = -0.432 + 31.68 + 11.88 - 2.112 = 41.016$

இவ்வாறு வருமானம் பெறும் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை ரூ. மாதம் 26 என்பது 42

கேள்வி 11.

இடைச்செருகலைப் பயன்படுத்தி 1985-ஆம் வருடத்தின் வியாபாரத்தை மதிப்பிடுக.

வருடம்	1982	1983	1984	1986
வியாபாரம் (இலட்சங்களில்)	150	235	365	525

தீர்வு :

x என்பது வணிக ஆண்டைக் குறிக்கலாம் மற்றும் y (லட்சங்களில்) வணிகத்தின் அளவைக் குறிக்கலாம்.

$y_0 = 150;\ y_1 = 235;\ y_2 = 365;\ y_3 = 525$

x=1985 லாக்ரேஞ்சின் இடைக்கணிப்பு சூத்திரத்தால்,

$\mathbf{y} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \times \mathbf{y_0} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\mathbf{y_1}$

$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \times \mathbf{y_2} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\mathbf{y_3}$

X	x_0	x_1	x_2	x_3
1985	1982	1953	1984	1986

$x - x_0$	1985 − 1982	3	$x_0 - x_1$	1982 − 1983	−1
$x - x_1$	1985 − 1983	2	$x_0 - x_2$	1982 − 1984	−2
$x - x_2$	1985 − 1984	1	$x_0 - x_3$	1982 − 1986	−4
$x - x_3$	1985 − 1986	−1	$x_1 - x_2$	1983 − 1984	−1
$x_2 - x_3$	1984 − 1986	−2	$x_1 - x_3$	1983 − 1986	−3

$$y = \frac{(2)(1)(-1)}{(-1)(-2)(-4)}(150) + \frac{(3)(1)(-1)}{(1)(-1)(-3)}(235) + \frac{(3)(2)(-1)}{(2)(1)(-2)}(365) + \frac{(3)(2)(1)}{(4)(3)(2)}(525)$$

$y = 37.5 - 235 + 547.5 + 131.25 = 481.25$

இவ்வாறு 1985-ம் ஆண்டு நடந்த வியாபாரம் 481.25 லட்சம் என மதிப்பிடப்பட்டுள்ளது

கேள்வி 12.

இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகலைப் பயன்படுத்தி f (x)-ன் மதிப்பை x =15-ல் காண்க .

x	3	7	11	19
f(x)	42	43	47	60

தீர்வு :

$y_0 = 42$	$y_1 = 43$	$y_2 = 47$	$y_3 = 60$

x	x_0	x_1	x_2	x_3
15	3	7	11	19

$x - x_0$	15 − 3	12	$x_0 - x_1$	3 − 7	−4
$x - x_1$	15 − 7	8	$x_0 - x_2$	3 − 11	−8
$x - x_2$	15 − 11	4	$x_0 - x_3$	3 − 19	−16
$x_3 - x_3$	15 − 19	−4	$x_1 - x_2$	7 − 11	−4
$x_2 - x_3$	11 − 19	−8	$x_1 - x_3$	7 − 19	−12

$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \times y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1$

$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \times y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$

$$y = \frac{(8)(4)(-4)}{(-4)(-8)(-16)}(42) + \frac{(12)(4)(-4)}{(4)(-4)(-12)}(43) + \frac{(12)(8)(-4)}{(8)(4)(-8)}(47) + \frac{(12)(8)(4)}{(16)(12)(8)}(60)$$

$y = 10.5 - 43 + 70.5 + 15 \Rightarrow y = 53$

எனவே x=15 ஆக இருக்கும் போது f(x) இன் மதிப்பு 53

அத்தியாயம் -8
கூறெடுப்பு முறைகளும் புள்ளியியல் அனுமானித்தலும்
(2, 3 , 5 மதிப்பெண்கள்)

கேள்வி 1. முழுமைத் தொகுதி என்றால் என்ன?
விடை:
முழுமை தொகுதி என்பது ஆய்வுக்கு தேவையான அனைத்து கூறுகள் அல்லது அனைத்து உறுப்புகளின் தொகுப்பை குறிக்கும்

கேள்வி 2. கூறு என்றால் என்ன?
தீர்வு :
முழுமை தொகுதியின் தன்மையை பிரதிபலிக்கும் வகையில் முழுமை தொகுதியில் தெரிவு செய்யப்படும் ஒரு பகுதி, மாதிரி அல்லது கூறு என அழைக்கப்படுகிறது

கேள்வி 3 . கூறு அளவை(Statistic) அல்லது மாதிரிப் பண்பளவை என்றால் என்ன?
விடை:
கூறுகளிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட எந்த ஒரு புள்ளிவிவர அளவையும் கூறு பண்பளவை அல்லது மாதிரி பண்பளவை என்று அழைக்கப்படும்

கேள்வி 4. பண்பளவையை (Parameter) - வரையறு.
விடை:
முழுமை தொகுதியின் புள்ளியியல் மாறிகளான சராசரி (μ), பரவற்படி(σ^2) ஆகியன முழுமை தொகுதியின் பண்பளவைகளாகும் . அவற்றை தொகுதி பண்பளவை **(Parameter)** என்று அழைப்பர்

கேள்வி 5. கூறு அளவையின் மாதிரிப் பரவல் என்றால் என்ன?
விடை:
ஒரே முழுமை தொகுதியில் இருந்து பெறப்பட்ட ஒரே அளவு கொண்ட அனைத்து மாதிரிகளின் புள்ளியியல் அளவைகள் கணக்கிடப்பட்டு ஒரு நிகழ்வெண் (அலைவெண்) பரவல் அமைப்பதே கூறெடுப்பு பரவல் என்று மாதிரி பரவல் என அழைக்கப்படுகிறது

கேள்வி 6. திட்டப்பிழை என்றால் என்ன?
விடை:
ஒரு புள்ளியியல் அளவையின் கூறெடுப்பு பரவலின் திட்டவிலக்கமே திட்டப்பிழை என்றழைக்கப்படுகிறது

கேள்வி12: எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பின் நன்மைகள் எவையேனும் இரண்டினை எழுதுக.
விடை
(i) தனிப்பட்ட நபரின் விருப்பு , வெறுப்பு தவிர்க்கப்படுகிறது
(ii) இது சிக்கனமான முறையாகும். ஏனெனில் பொருள் விரையம் மற்றும் அதிக உழைப்பு விரையமாவதை தவிர்க்கிறது

கேள்வி14:
முறைபடுத்திய கூறெடுப்பின் குறைகள் இரண்டினைக் கூறுக.
விடை
(i) முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பானது சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்யப்படுவது இல்லை .
(ii) முழுமை தொகுதியின் அளவு (N) ஆனது மாதிரி தொகுதி அளவு n - இன் பெருக்கற்பலன் ஆக இல்லாதிருப்பின் இடைவெளி k - ன் மதிப்பானது முழு எண்ணாக இருக்க வாய்ப்பில்லை . இவ்வாறான தருணங்களில் கூறுகளைத் தெரிவு செய்வது கடினம் .

பயிற்சி 8.2

கேள்வி1. புள்ளியியல் அனுமானத்தின் இரண்டு பகுதிகளை எழுதுக?
விடை:
புள்ளியியல் அனுமானத்திற்கான செயல்பாட்டில்
(i) மதிப்பிடுதல்
(ii) கருதுகோள் சோதனை எனும் இரண்டு முக்கிய பகுதிகள் உள்ளன .

கேள்வி2. மதிப்பீட்டுப் பண்பளவை என்றால் என்ன?
விடை:
மதிப்பு தெரியாத ஒரு தொகுதி பண்பு அளவை அளவிட பயன்படுத்தப்படும் மாதிரி பண்பளவையே மதிப்பீட்டு பண்பளவை எனப்படும் . அதாவது மதிப்பீட்டு பண்பளவை என்பது ஒரு மாதிரி பண்பளவையே , இது முழுமை தொகுதிப் பண்பளவையை மதிப்பிட பயன்படுகிறது .

கேள்வி3. மதிப்பீட்டு அளவைஎன்றால் என்ன?
விடை:
மதிப்பீட்டு பண்பளவையின் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு , மதிப்பீட்டு அளவை எனப்படும் . மாறாக , கண்டறிந்த புள்ளியியல் அளவில் மதிப்பே மதிப்பீட்டு அளவை ஆகும் .

கேள்வி4. புள்ளி மதிப்பீட்டு முறை என்றால் என்ன?
விடை:
ஒரே ஒரு மதிப்பை ,மதிப்பீட்டு அளவாக பயன்படுத்தி , தொகுதி பண்பளவையின் மதிப்பை பெற முடியுமானால் அம்முறை புள்ளி மதிப்பீட்டு முறை என்று அழைக்கப்படுகிறது . மாறாக , தொகுதி பண்பளவையின் மதிப்பு ஒரு தனி எண்ணாக இருக்குமாயின் அதனை மதிப்பீட்டு முறை எனலாம் .

கேள்வி5. இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை என்றால் என்ன?
விடை:
புள்ளி மதிப்பீட்டு முறையை ஏற்க இயலாத சூழ்நிலைகளில் , தொகுதி பண்பளவை மதிப்புகள் குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளில் அமையுமாறு எல்லைகளை கண்டறியும் முறை இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை என வரையறுக்கப்படுகிறது .

கேள்வி6. நம்பிக்கை இடைவெளி என்றால் என்ன?
விடை
ஒரு சிறு மதிப்பான α என்பதை எடுத்துக் கொண்டு அதை மிகை காண் நிலை (அ) மிகை காண் மட்டம் (1% (அ) 5%) என்று கூறுகிறோம் . அதற்குரிய இரு மாறிலிகள் $c_1, c_2 \rightarrow P\left(c_1 < \theta < \frac{c_2}{t}\right) = 1 - \alpha$
c_1, c_2 இரு அளவுகளும் நம்பிக்கை எல்லைகள் என்றும் $[c_1, c_2]$ என்ற எல்லைகளுக்குள் முழுமை தொகுதியின் தொகுதி பண்பளவை மதிப்பு அமையுமானால் இடைவெளி நம்பிக்கை இடைவெளி என்றும் , $(1 - \alpha)$ என்பது நம்பிக்கை கெழு என்றும் அழைக்கப்படுகிறது

கேள்வி7. இன்மை கருதுகோள் என்றால் என்ன? எடுத்துக்காட்டு தருக.

விடை

F.A பிஷரின் கூற்றுப்படி உண்மை என எடுக்கப்பட்ட எடுகோளை அனுமானத்தின் கீழ் நிராகரிக்க சாத்தியமான சோதனைக்குறிய எடுகோளே "இன்மை கருதுகோள்" ஆகும். இது வழக்கமாக H_0 எனக் குறிக்கப்படும் . எடுத்துக்காட்டாக குறிப்பிட்ட மதிப்பு μ_0 முழுமை தொகுதியின் சராசரி என அறிய விரும்பும் போது இன்மை கருதுகோள் என்பதை $H_0: \mu = \mu_0$ என அமைத்துக் கொள்கிறோம்

கேள்வி8 . மாற்று கருதுகோள் - வரையறு.

விடை

இன்மை கருதுகோளுக்கு நிரப்பு பண்பாக அதாவது எதிராக அமையும் கருதுகோள் " மாற்று கருதுகோள் " எனப்படும் . இதனை வழக்கமாக H_1 என்று குறிப்பிடுகிறோம்

கேள்வி9. மறுக்கும் பகுதியை- வரையறு.

விடை

கூறுவெளியில் இன்மை கருதுகோள் H_0 எப்பகுதியில் மறுக்கப்படுகிறதோ அந்த பகுதியே மறுக்கப்படும் பகுதி என்கிறோம்

கேள்வி10. மறுக்கும் அளவு - வரையறு.

விடை

கூறுபண்பளவை சோதனை அளவைவில் எந்த மதிப்பானது ஏற்கப்படும் மற்றும் மறுக்கப்படுவதற்கான பகுதியினை பிரிக்கிறதோ அம்மதிப்பை தீர்மான மதிப்பு எனப்படும்.

கேள்வி11. மிகைகாண் நிலை- வரையறு.

விடை

மதிப்பீட்டு அளவையின் நம்பகத்தன்மை மற்றும் அதை அனுமதிப்பதில் உள்ள அபாயம் ஆகியவற்றைப் பொறுத்து மிகைகாண் நிலை மதிப்பை α கூறு எடுப்பதற்கு முன்னதாக தீர்மானிக்க வேண்டும் .

கேள்வி12. முதல்வகை பிழை என்றால் என்ன? தீர்வு:

விடை : இன்மை கருதுகோள் H_0 உண்மையாக இருக்கும் போது அதனை நிராகரிப்பது முதல் வகைபிழை எனப்படும்

கேள்வி13 . ஒருமுனை சோதனை என்றால் என்ன?.

விடை

கூறு அளவையின் மதிப்பானது மாதிரி பரவலின் வலது அல்லது இடது தீர்வு கட்ட பகுதியில் அமைவதால் முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை பற்றிய கருதுகோள் நிராகரிக்கப்படும் நிகழ்வே ஒருமுனை சோதனை என்கிறோம் .

3 - மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 8.1

கேள்வி10. கூறெடுப்பு சார்ந்த பிழையைப் பற்றி விளக்குக.

விடை

கூறுகளை வாய்ப்பு முறையில் தெளிவு செய்வதிலும் , அவற்றின் விவரங்களை சேகரிப்பதிலும் ஏற்படும் பிழைகள் கூறெடுப்பு சார்ந்த பிழைகள் எனப்படும் . இப்பிழைகள் கூறினைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முறையினை உள்ளடக்கியதாகும் . இப்பிழை தற்செயலாகவும் , சார்பற்றதாகவும் , பாரபட்சம் இல்லாமலும் ஏற்படலாம் . கூறெடுப்பு சார்ந்த பிழைகள் ஏற்படுவதற்கு முக்கிய காரணங்கள் பின்வருமாறு .

குறைபாடுள்ள உத்தியின் மூலம் சரியான கூறுக்கு பதில் , தகுதியற்ற கூறு தேர்வு செய்யப்படும்போது

ஆய்வாளர் கூறெடுத்தலின் போது உட்கந்த உறுப்பு கிடைக்காத போது அதற்கு பதிலாக தமக்கு தேவையான உறுப்பினை தெரிவு செய்யும் போது

நில அளவீடுகள் இன் போது எல்லைக்கோடு கூறில் தேர்ந்தெடுப்பதா அல்லது தவிர்ப்பதா என்பது ஒவ்வொரு ஆய்வாளரை பொருத்ததாகும் . இவ்வாறு தவறான வரையறை கொண்ட மாதிரி அலகுகள் (Faulty demarcation of Sampling) எனப்படுகிறது .

கேள்வி11. கூறெடுப்பு சாரா பிழையைப் பற்றி விளக்குக.

விடை : களப்பணி ஆய்வில் விவரங்களை சேகரிக்கும் போது மதிப்பிடும் போது அல்லது கருவிகளை (நாடா அளவுகோல்) கொண்டு அளவிடும்போது ஆய்வாளர்கள் இடையே விவரங்கள் வேறுபடுகிறது . இவ்வாறாக மனித காரணிகளால் எழும் பிழைகள் கூறெடுப்பு சாராபிழைகளாகும் . இப்பிழை ஏற்படுவதற்கான காரணங்கள்

(i) ஆய்வு மேற்கொள்பவர் இன் அல்லது பதில் அளிப்பவர் இன் அலட்சியம் மற்றும் கவனக்குறைவு

(ii) மாதிரி கணிப்பில் ஈடுபடும் ஆய்வாளர்களின் நல்ல அனுபவம் இன்மை மற்றும் தகுதிக் குறைவு

(iii) தவறான வினாப்பட்டியல் அமைப்பு

(iv) தவறான புள்ளி விவரங்களை பயன்படுத்துவது

(v) மாதிரி கணக்கெடுப்பு முடிவடையாத ஆய்வு

கேள்வி13.

படுகை கூறெடுப்பின் நிறைகள் எவையேனும் மூன்றினை எழுதுக.

விடை

(i) படுகை கூறெடுப்பில் கூறுகளின் எண்ணிக்கை சிறிய அளவில் உள்ளதாக இருப்பினும் அதன் துல்லியத் தன்மை குறைவதில்லை

(ii) முழுமைத் தொகுதி பகுக்கப்பட்டிருந்தால் எளிதில் நிர்வகிக்க முடியும்

(iii) அரசானது புவியியல் அடிப்படையில் நிலப்பகுதிகளை இடம் மற்றும் பரப்பளவை பொறுத்து படுகைகளாக பிரித்து உள்ளதால் நேரம் மற்றும் செலவை குறைக்க முடிகிறது

கேள்வி17.

மொத்த வணிகம் செய்யும் ஒருவர், தான் விற்பனை செய்த மொத்த ஆப்பிள்களில், 4% ஆப்பிள்கள் குறைப்பாடுள்ளவை எனக் கூறுகிறார். சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்யப்பட்ட 600 ஆப்பிள்களில்,36 ஆப்பிள்கள் குறைபாடுள்ளவை எனில், நல்ல ஆப்பிள்கள் குறித்த திட்டப்பிழையைக் காண்க.

தீர்வு:

மாதிரி அளவு= 600

குறைபாடுள்ள ஆப்பிள்களின் எண்ணிக்கை = 36

மாதிரி விகிதம் $p = \frac{36}{600} = 0.06$

மக்கள் தொகை விகிதம்

P= குறைபாடுள்ள ஆப்பிள்களின் நிகழ்தகவு= $4\% = \mathbf{0.04}$

$Q = 1 - P = 1 - 0.04 = 0.96$

மாதிரி விகிதத்திற்கான திட்டப்பிழை= $\sqrt{\frac{PQ}{N}}$

$$= \sqrt{\frac{(0.04)(0.96)}{600}} = \sqrt{0.000064} = 0.008$$

கேள்வி16.

கீழ்காணும் டிப்பெட்டின் வாய்ப்பு அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி

2952	**6641**	**3992**	**9792**	**7969**	**5911**	**3170**	**5624**
4167	**9524**	**1545**	**1396**	**7203**	**5356**	**1300**	**2693**
2670	**7483**	**3408**	**2762**	**3563**	**1089**	**6913**	**7991**
0560	**5246**	**1112**	**6107**	**6008**	**8125**	**4233**	**8776**
2754	**9143**	**1405**	**9025**	**7002**	**6111**	**8816**	**6446**

மூன்றிலக்க இரட்டை எண்களாக 10 எண்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியைத் தெரிவு செய்க.

தீர்வு:

பத்து 3 இலக்க இரட்டை எண்களின் மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுக்க பல வழிகள் உள்ளன. அட்டவணையில் இருந்து, முதல் எண்ணிலிருந்து தொடங்கி நெடுவரிசையில் நகர்த்தவும். முதல் மூன்று இலக்கங்களை எண்ணாகத் தேர்ந்தெடுக்கவும். ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருந்தால், அடுத்த எண்ணுக்குச் செல்லவும். தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரி 416, 664, 952, 748, 524, 914, 154, 340, 140, 276 ஆகும்.

திட்டப்பிழை	சூத்திரம்
திட்டவிலகல்	$\sqrt{\sigma^2/2n}$
சராசரி	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
மக்கள் தொகை விகிதம்	$\sqrt{\frac{PQ}{N}}$

பயிற்சி 8.2

கேள்வி14.

சராசரி மதிப்பு 4 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 3 உடைய ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 100 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு கூறின் சராசரி 63.5 எனில் சராசரியின் மாறுபாடு குறிப்பிட்டத்தக்கதா?

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டது மாதிரி அளவு n= 100

முழுமைத் தொகுதி	கூறு அளவு
முழுமைத் தொகுதி சராசரி = $\mu = 67.39$	கூறு சராசரி = $\bar{x} = 67.47$
முழுமைத் தொகுதி திட்டவிலக்கம் S.D. = $\sigma = 1.3$	-

இப்போது,

இன்மை கருதுகோள் $H_0: \mu = 4$

மாற்று கருதுகோள் $H_1: \mu \neq 4$

மிகை காண் நிலை $\alpha = 5\% = 0.05$

அட்டவணை மதிப்பு $Z_{\alpha/2} = 1.96$

கூறு பண்பளவை சோதனை:

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{3.5-4}{\frac{3}{\sqrt{100}}} = \frac{-0.5}{0.3} = -1.667$$

$|Z| = |-1.667| = 1.667$

$|Z| = 1.667 < 1.96$ (i.e) $|Z| < Z_{\alpha/2}$.

the null hypothesis H_0 is accepted.

எனவே, மாதிரி சராசரிக்கும் மக்கள்தொகை சராசரிக்கும் இடையே குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு இல்லை என்று முடிவு செய்கிறோம்.

5 - **மதிப்பெண்கள்-**

பயிற்சி 8.1

கேள்வி7.

எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பைத் தகுந்த எடுத்துக்காட்டுடன் விளக்குக.

விடை

ஏளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறையில் கூறுகளைத் தெரிவு செய்யும் முறையானது முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொர் உறுப்பும் சமமான மற்றும் சார்பற்ற வாய்ப்பைப் பெற வழி வகுக்கிறது. எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பினை, உறுப்புகளைத் திரும்பவும் வைக்கும் முறை (அல்லது) திரும்ப வைக்கா முறை என்னும் வகைகளில் நிகழ்த்தலாம். எளிய சமவாய்ப்புக் கூறெடுப்பை, திரும்பி வைக்கும் முறையில் தெரிவு செய்யும்போது ஏற்கனவே தெரிவு செய்யப்பட்ட ஒரு கூறு, பல முறை கூறெடுத்தலில் இடம் பெற வாய்ப்பு உள்ளது. எனவே எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பில், திரும்ப வைக்கா முறையினைப் பின்பற்றலாம்.

N உறுப்புகளைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுத்து, திரும்ப வைக்கா முறையில் முதல் உறுப்பை தெரிவு செய்வதற்கான நிகழ்தகவு ஆகவும் இரண்டாவது உறுப்பை, மீதமுள்ள (N-1) உறுப்புகளிலிருந்து தெரிவு செய்வதற்கான நிகழ்தகவு ஆகவும்

குலுக்கல் முறை:

இம்முறை நடைமுறையில் உள்ளதும், எளிதானதும் ஆகும். இம்முறையில் உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முடிவுறு முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் தன்தனி எண்களால் குறிப்பிட வேண்டும். பிறகு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அனைத்து அலகுகளின் எண்ணிக்கைக்கு ஏற்ப ஒரே அளவு, வடிவம் மற்றும் நிறம் இருக்குமாறு காகிதங்கள் தனித்தனித் துண்டுகளாக வெட்டப்பட்டு அவற்றில் எண்கள் குறிக்கப்படுகின்றன. இவற்றை ஒரே மாதிரியாக மடித்து ஒரு கொள்கலனில் இட்டு நன்றாகக் குலுக்க வேண்டும். இதிலிருந்து தேவையான கூறின் அளவிற்கு ஏற்ப, தேவையான சீட்டுகளைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 100 மாணவர்களிலிருந்து 10 மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதாக வைத்துக் கொண்டால் ஒரே அளவுள்ள 100 துண்டு சீட்டுகளில் மாணவர்களின் பெயர் அல்லது பதிவு எண்ணை எழுதி, நன்றாகக் குலுக்கி, அதிலிருந்து பத்து சீட்டுகளை எடுத்து, அதன் மூலம் பத்து மாணவர்களைத் தேர்வு செய்ய வேண்டும். இம்முறையில் கூறுகள் முழுமைத் தொகையிலிருந்து கட்டுப்பாடற்ற முறையில் தெரிவு செய்யப்படுவதால், இதனைக் கட்டுப்பாடற்ற சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு என அழைக்கலாம்.

ii) சமவாய்ப்பு எண்களின் அட்டவணை மூலம் கூறெடுக்கும் முறை:

முழுமைத் தொகுதியின் அளவு மிக அதிகமாக இருப்பின், குலுக்கல் முறைப்படி துண்டு சீட்டுகளில் எல்லா எண்களையும் குறிப்பது மிகவும் கடினமான ஒன்றாகும். இவ்வாறான சூழ்நிலையில் சமவாய்ப்பு எண்களால் ஆகிய அட்டவணை முறையினைப் பயன்படுத்துவது மாற்றுவழி ஆகும். நடைமுறையில் அதிகம் பயனுள்ளதாகவும் எளிய மற்றும் செலவற்ற முறையில் கூறுகளைச் சமவாய்ப்பு முறையில், சமவாய்ப்பு எண்களின் அட்டவணையைக் கொண்டு தெரிவு செய்ய முடியும். 0, 1, 2,.......9 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு வடிவமைக்கப்படும் சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையில் உள்ள எண்கள், ஒன்றையொன்று சார்ந்திராமலும் எண்களின் அமைப்பு ஏறத்தாழ அதே நிகழ்வெண் எண்ணிக்கையில் இருப்பதற்கேற்ப அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

கேள்வி 8.

படுகை கூறெடுப்பை தகுந்த எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குக.

விடை

இம்முறையில் முழுமைத் தொகுதி பல துணை முழுமைத் தொகுதிகளாகப் பிரிக்கப் படுகிறது. இவற்றை படுகை(STRATA) என அழைக்கிறோம். பிறகு ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் சமவாய்ப்பு முறையில் கூறுகள் தெரிவு செய்யப்படுகிறது. எல்லா படுகைகளிலிருந்தும் பெறப்பட்ட கூறுகளின் தொகுப்பே படுகை கூறெடுப்பாகும். முழுமைத் தொகுதியானது அதன் பண்புகளைப் பொறுத்து அதாவது ஒத்த பண்பற்றவையாகவோ அல்லது வெவ்வேறு பகுதிகளாகவோ(துண்டுகளாகவோ) அல்லது பிரிவுகளாகவோ இருக்கும் போது படுகை கூறெடுப்பு முறை பயன்படுகிறது.

படுகை கூறெடுப்பு முறையின் மூலம் கூறுகளை தெரிவு செய்வதற்கு முன், முழுமைத்தொகுதியை ஒத்த பண்புகள் உடைய துணைப் பிரிவுகளாக அல்லது படுகைகளாக பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் கூறுகள் தெரிவு செய்யப்பட வேண்டும்.

படுகை கூறெடுப்பு முறையில் சமவாய்ப்பு மாதிரிகளை தெரிவு செய்யும் போது பின்பற்ற வேண்டிய படிநிலைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1)முழுமைத் தொகுதியானது ஏறத்தாழ ஒத்த பண்புகளைக் கொண்ட உறுப்புளாலான வெள;வேறு படுகைகளாகப் பிரிக்கப்பட வேண்டும். படுகைகள் ஒன்றோடொன்று சேராதவாறு வடிவமைக்கப்பட வேண்டும்.

2)முழுமைத் தொகுதி, படுகைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டபின் ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் குறிப்பிட்ட அளவு கொண்ட கூறுகளைச் சமவாய்ப்பு முறையில், குலுக்கல் முறையில் அல்லது சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையிலிருந்து பெறலாம்.

ஒரு மாநிலத்தில் தேர்தலுக்காக, வெள;வேறு சட்டமன்றப் பகுதிகளை பிரிப்பது, மாநிலத்திலிருந்து மாவட்டங்களை பிரிப்பது படுகைகளுக்கான எடுத்துக்காட்டுகள், இதுபோன்ற மற்ற நிகழ்வுகளிலும் படுகை கூறெடுப்பு முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது.

கேள்வி9.

முறைபடுத்திய கூறெடுப்பை தகுந்த எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குக.

விடை

முதல் கூறெடுப்பானது சமவாய்ப்பு முறையில் முதல் ம அலகுகளிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்டு, முதல் கூறிலிருந்து ஒவ்வொரு ம ஆவது உறுப்புகளை அடுத்த கூறுகளாக தெரிவு செய்யப்பட்டு பெறப்படும் கூறெடுப்பு, முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பு அல்லது முறை சார்ந்த மாதிரி எடுத்தல் முறை என அழைக்கப்படுகிறது.

முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகளின் முழு பட்டியலும் இருக்கும்போது முறைபடுத்திய கூறெடுப்பு முறை பரவலாக பயன்படுத்தப்படுகிறது. இம்முறையைப் பயன்படுத்துவதற்கு ஏதுவாக உறுப்புகளை ஏறுவரிசையிலோ, அகரவரிசையிலோ, புவியியல் அடிப்படையிலோ அல்லது இதுபோன்ற மற்ற ஏனைய வரிசைகளிலிருந்து ஏதாவது ஒரு வரிசையில் அமைத்தல் வேண்டும். இம்முறையில் மாதிரிகளைத் தெரிவு செய்யும் போது, முதல் உறுப்பை சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்து பிறகு மற்றைய உறுப்புகளை நாம் வரையறுத்த வடிவத்திற்கு உட்பட்டு முதல் உறுப்பு சார்ந்த முறையாகவும் தொடர்ச்சியாகவும் தெரிவு செய்யப்படுகின்றன. இம்முறையில் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு ம - ஆவது உறுப்பு மாதிரியில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. இங்கு ம என்பது மாதிரி எடுத்தலின் இடைவெளி ஆகும். இடைவெளி ம என்பது முழுமைத் தொகுதியின் அளவுக்கும் (N) மாதிரிகளின் அளவுக்கும் (n) உள்ள விகிதம் ஆகும்.

கூறு இடைவெளி $k = \frac{N}{n}$

உதாரணத்திற்கு, 6000 உறுப்புகளை கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 20 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியை முறைபடுத்திய கூறெடுப்பு முறையில் தேர்வு செய்வதாக எடுத்துக்கொள்வோம். முதலில் 1 முதல் 6000 வரையிலான எண்களை அனைத்து 6000 உறுப்புகளுக்கும் குறியிட வேண்டும்.

மாதிரி இடைவெளி $k = \frac{N}{n} = \frac{6000}{20} = 300$

மாதிரி இடைவெளி என்பது 6000 உறுப்புகள் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு 300 மாதியிலும் ஒரு மாதிரியைத் தெரிவு செய்யலாம். முதல் மாதிரி 50-எண்ணாகத் தெரிவு செய்வோமாயின் மற்ற உறுப்புகளை முதல் உறுப்பிலிருந்து இடைவெளி 300 – ஐக் கூட்டிப் பெற வேண்டும். அதாவது () 50, 350, 650, 950, 1250, 1550, 1850, 2150, 2450, 2750, 3050, 3350, 3650, 3950, 4250, 4550, 4850, 5150, 5450, 5750, இவ்வெண்களை உறுப்புகளாக கொண்ட மாதிரிகளை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தெரிவு செய்யலாம்..

கேள்வி19.

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 60 உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு பெருங்கூறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதன் திட்டவிலக்கம் 2.5 ஆககணக்கிடப்பட்டது. திட்டவிலக்கம் 3 கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் பொருத்தமான திட்டப்பிழையை கணக்கிடுக.

தீர்வு:

மாதிரி அளவு n= 60 ; மாதிரி **திட்டவிலக்கம்**= 2.5

மக்கள்தொகை **திட்டவிலக்கம்** $\sigma = 3$

திட்ட விலகத்திற்கான திட்டப்பிழை = $\sqrt{\sigma^2/2n}$

$= \sqrt{\frac{9}{120}} = \sqrt{0.075} = 0.2739$

கேள்வி20.

ஒரு கிராமத்தில், 400 நபர்களைக் கொண்ட ஒரு கூறில் சைவ உணவு உண்பவர்கள் 230 நபர்கள், மற்றவர்கள் அசைவ உணவு உண்பவர்கள் என்க. அந்த கிராமத்தில் சைவ மற்றும் அசைவ உணவுகள் உண்பவர்களின் எண்ணிக்கை சமம் எனில் திட்டப்பிழையைக் காண்க.

தீர்வு:

மாதிரி அளவு n= 400 [230 சைவ உணவு உண்பவர்கள்.]

மாதிரி விகிதம் $p = \frac{230}{400} = 0.575$

மக்கள் தொகை விகிதம்

$\mathbf{P} = \frac{1}{2}$ **நிகழ்தகவு (கிராமத்தில் இருந்து சைவ உணவு உண்பவர்கள்)**

(சைவம் மற்றும் அசைவ உணவுகள் சமமாக இருப்பதால்)

$Q = 1 - P = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

விகிதத்திற்கான திட்டப்பிழை= $\sqrt{\frac{PQ}{N}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{400}} = \sqrt{\frac{0.25}{400}}$

$= \sqrt{0.000625} = 0.025$

பயிற்சி 8.2

கேள்வி15.

400 தனி நபர்களைக் கொண்ட ஒரு கூறில் உள்ளவர்களின் சராசரி உயரம் 67.47 அங்குலம் எனில், அக்கூறானது சராசரி உயரம் 67.39 அங்குலமும் திட்டவிலக்கம் 1.30 அங்குலமும் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாக கருதலாமா?

தீர்வு:

கூறு அளவு $n = 400$

முழுமைத் தொகுதி	கூறு அளவு
முழுமைத் தொகுதி சராசரி $= \mu = 67.39$	கூறு சராசரி = $\bar{x} = 67.47$
முழுமைத் தொகுதி திட்டவிலக்கம் S.D. $= \sigma = 1.3$	-

இன்மை கருதுகோள் $H_0: \mu = 67.39$ அங்குலம்

மாற்று கருதுகோள் $H_1: \mu \neq 67.39$ அங்குலம்

மிகை காண் நிலை $\alpha = 5\% = 0.05$

அட்டவணை மதிப்பு $Z_{\alpha/2} = 1.96$

கூறு பண்பளவை சோதனை:

$$\mathbf{Z} = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{67.47-67.39}{\frac{1.3}{\sqrt{400}}} = \frac{0.08}{0.065} = \mathbf{1.2308}$$

$|z| = 1.2308 < 1.96$ (i.e) $Z < Z_{\alpha/2}$.

கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு, 5% மிகை காண் நிலை அட்டவணை மதிப்பை விட குறைவாக இருப்பதால், இன்மை கருதுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது.

<u>கேள்வி16.</u>

ஒரு தேசிய நிர்வாகதிறன் தேர்வில் மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 76 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 8 என்க. மாநிலத்தின் கல்வி முறையினை மதிப்பீடு செய்ய சமவாய்ப்பு முறையில் 100 மாணவர்கள் தெரிவு செய்யப்பட்டனர். அவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 72 எனில் தேசிய மற்றும் மாநில அளவில் மாணவர்களின் மதிப்பெண்களில் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் உள்ளதா என்பதை 0.05 மிகைக்காண் நிலையில் சோதிக்க.

தீர்வு: n = 100

முழுமைத் தொகுதி	கூறு அளவு
முழுமைத் தொகுதி சராசரி $= \mu = 76$	கூறு சராசரி = $\bar{x} = 72$
முழுமைத் தொகுதி திட்டவிலக்கம் S.D. $= \sigma = 8$	-

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu = 76$

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \mu \neq 76$

மிகை காண் நிலை $\alpha = 5\% = 0.05$

அட்டவணை மதிப்பு $Z_{\alpha/2} = 1.96$

கூறு பண்பளவை சோதனை: $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{72-76}{\frac{8}{\sqrt{100}}} = \frac{-4}{0.8} = -5$

$|Z| = |-5| = 5$

கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு அட்டவணை மதிப்பை விட அதிகமாக இருப்பதால், இன்மை கருதுகோளை நிராகரிக்கிறோம் மற்றும் மாற்று கருதுகோளை ஏற்கிறோம்

<u>கேள்வி17.</u>

ஒரு தயாரிப்பாளர் வழங்கிய கம்பி வடத்தின் சராசரி முறியும் வலிமை 1800 ஆகவும் திட்டவிலக்கம் 100 ஆகவும் உள்ளது. கம்பி வடத்தின் முறிவு வலிமை புதிய தொழில் நுட்பம் மூலம் அதிகரித்துள்ளது என உரிமையாளர் கூறுகிறார். அவர் கூற்றைச் சோதிக்க, 50 கம்பி வடம் மாதிரியாக எடுக்கப்பட்டு அதன் சராசரி முறியும் வலிமை 1850 என்று கண்டறியப்படுகிறது. தயாரிப்பாளரின் கூற்றை 0.01 என்ற மிகைகாண் நிலை சோதனையில் ஆதரிக்கலாமா?

தீர்வு:

n = 50

முழுமைத் தொகுதி சராசரி $= \mu = 1800$	கூறு சராசரி = $\bar{x} = 1850$
முழுமைத் தொகுதி திட்டவிலக்கம் S.D. $= \sigma = 100$	-

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu = 1800$

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \mu \neq 1800$

மிகை காண் நிலை $\alpha = 1\% = 0.01$

அட்டவணை மதிப்பு $Z_{\alpha/2} = 2.33$

கூறு பண்பளவை சோதனை:

$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1850-1800}{\frac{100}{\sqrt{150}}} = \frac{50}{14.144} = 3.536$

$|z| = 3.536$ & $|Z| > Z\alpha$ (i.e.) $3.536 > 2.33$.

முக்கியத்துவ நிலையில் அட்டவணை மதிப்பை விட கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு அதிகமாக இருப்பதால், இன்மைகருதுகோள் நிராகரிக்கப்படுகிறது மற்றும் மாற்று கருதுகோளை ஏற்றுக்கொள்கிறோம். உற்பத்தி செயல்பாட்டில் புதிய நுட்பத்தால் கேபிள்களின் உடைக்கும் வலிமை அதிகரிக்கிறது என்று முடிவு செய்கிறோம். அதனால் கோரிக்கை 1% முக்கியத்துவம் வாய்ந்த அளவில் ஆதரிக்கப்படுகிறது

<u>Example 8.11</u>

ஒரு இயந்திரம் தயாரிக்கும் உற்பத்தி பொருளின் உதிரிபாகங்களின் திட்டவிலக்கம் 1.6 செ.மீ. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 64 மாதிரிகளின் சராசரி உயரம் 90 செ.மீ. ஆகும். உதிரிபாகங்களின் உயரம் 88 செ.மீட்டருக்கு குறைவாகவோ அல்லது 92 செமீக்கு அதிகமாகவோ இருக்கும் போது அப்பாகங்களை வாடிக்கையாளர் நிராகரிக்கிறார். உற்பத்தி செய்யப்பட்ட சராசரி உயரம் கொண்ட உதிரிபாகங்கள், 95% நம்பிக்கை இடைவெளியில் அமையும் என வாடிக்கையாளருக்கு உறுதிபடுத்த முடியுமா?

தீர்வு:

இங்கு μ என்பது உதிரிபாகங்களின்முழுமைத் தொகுதி சராசரி உயரம் ஆகும்.

95% எல்லைகள் : $\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

இங்கு $\sigma = 1.6, Z_{\alpha/2} = 1.96, \bar{x} = 90$ மற்றும் $n = 64$

திட்டப்பிழை $S.E. = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.6}{\sqrt{64}} = 0.2$

எனவே , $90 - (1.96 \times 0.2) < \varphi < 90 + (1.96 \times 0.2)$

i.e. $(89.61 < \varphi < 90.39)$

உதிரிபாகங்களின்முழுமைத்தொகுதி சராசரி உயரங்களின்உண்மைமதிப்பு (89.61, 90.39) என்ற 95% நம்பிக்கைஇடைவெளியில் உள்ளது. எனவே95% நம்பிக்கைஇடைவெளியில் உள்ளஉதிரிப்பாகங்களை வாடிக்கையாளர்கள் ஏற்றுக்கொள்வார்கள்.

<u>Example 8.12</u>

பருத்தி நூலின் வலிமை(அறும் தன்மை) அறிய 100 அளவீடுகள் கொண்ட ஒரு தொகுதியினைத் தெரிவு செய்து அவற்றின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் முறையே 7.4 கிராம் மற்றும் 1.2 கிராம் எனில், பருத்தி நூலின் சராசரி வலிமையின் 95% நம்பிக்கை இடைவெளியை காண்க.

தீர்வு:

மாதிரி அளவு= 100, $\bar{x} = 7.4$, s=1.2.

$\sigma = s$, $Z_{\alpha/2} = 1.96$

திட்ட பிழை $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1.2}{\sqrt{100}} = 0.12$

<u>சராசரி வலிமையின் 95% நம்பிக்கை இடைவெளியை</u>

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$7.4 - (1.96 \times 0.12) < \mu < 7.4 + (1.96 \times 0.12)$

$7.4 - 0.2352 < \mu < 7.4 + 0.2352$

$7.165 \leq \mu \leq 7.635$

முழுமைத்தொகுதியின் சராசரி வமிமைத் திறனாது (7.165,7.635) என்ற 95% நம்பிக்கை இடைவெளிக்குள் உள்ளது .

Example 8.13

மின்விளக்குகள் தயாரிக்கும் நிறுவனம் ஒன்றிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 169 விளக்குகள் கொண்ட கூறின் சராசரி ஆயுட்காலம் 1350 மணி நேரம், அதன் திட்டவிலக்கம் 100 மணி நேரம் எனில், மின்விளக்குகளின் சராசரி ஆயுட்கால இடைவெளிகளை 90% நம்பிக்கை இடைவெளியில் காண்க.

தீர்வு:

$n = 169, \bar{x} = 1350$ மணி, $\sigma = 100$ மணி

மிகைக்காண் $(100 - 90)\% = 10\%$

ஆகும். α is 0.1,10% இல் மிகைக்காண்

$Z_{a/2} = 1.645$ S.E. $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{169}} = 7.69$

முழுமைத்தொகுதியின் சராசரியின் 90% நம்பிக்கை எல்லைகள்

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$1350 - (1.645 \times 7.69) < \mu < 1350 + (1.645 \times 7.69)$

$1337.35 < \mu < 1362.65$

மின் விளக்கு சராசரி ஆயுட்காலமானது 90% நம்பிக்கை இடைவெளியில் (1337.35, 1362.65) என்று அமைகிறது.

Example 8.14

ஒரு மகிழுந்து தயாரிக்கும் நிறுவனம் தற்போது உபயோகத்தில் உள்ள மகிழுந்தை விட எரிபொருள் சிக்கனப்படுத்தும் நோக்கில் புதிய ஆறு உருளைத் திறன் உள்ள மகிழுந்தை அறிமுகம் செய்கிறது. 50 புதிய மகிழுந்துகள் மாதிரியாக எடுத்து அதன் பெட்ரோல் உபயோகம் குறித்து சோதனை செய்யப்பட்டபோது அது சராசரியாக ஒரு லிட்டருக்கு 10 கி.மீ. மற்றும் அதன்திட்ட விலக்கம் 3.5 கி.மீ என அறியப்பட்டது. புதிய மகிழுந்தின் சராசரி பெட்ரோல் உபயோகம் லிட்டருக்கு 9.5 கி.மீ என்ற நிறுவனத்தின் அறிவிப்பை ஏற்று கொள்ளலாமா என்பதை 5% மிகைகாண் நிலையில் சோதிக்க.

தீர்வு:

கூறு அளவு $n = 50$,

முழுமைத் தொகுதி சராசரி = $\mu = 9.5$ கிமீ	கூறு சராசரி = $\bar{x} = 10$ கிமீ
முழுமைத் தொகுதி திட்டவிலக்கம் S.D. = $\sigma = s = 3.5$ கிமீ	S = 3.5

இன்மைகருதுகோள், $H_0: \mu = 9.5$ என்பதாகும்.

மாற்று எடுகோள் : $H_1: \mu \neq 9.5$ (இருமுனை சோதனை)

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\% = 0.05$

கூறுபண்பளவைச் சோதனை கணுக்கிடுதல்

$\boldsymbol{Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)};$

$$\boldsymbol{Z = \frac{10-9.5}{\frac{3.5}{\sqrt{50}}} \sim N(0,1) = \frac{0.5}{0.495} = 1.01}$$

$|Z| = 1.01$ மற்றும் அட்டவணை மதிப்பு $Z_{\alpha/2} = 1.96$.

$Z < Z_{\alpha/2}$ அதாவது $1.01 < 1.96$.

மிகைகாண் நிலையில் இன்மை கருதுகோள் H_0 ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. ஆகவே நிறுவனத்தின் அறிவிப்பின்படி புதிய மகிழுந்தின் எரிபொருள் பயன்பாடு 9.5 கி.மீ/லி என்பதை ஏற்றுக்கொள்ளலாம்.

Example 8.15

பந்து முனை பேனா தயாரிக்கும் நிறுவனமானது, தான் தயாரிக்கும் பேனாவின் (எழுதும்) ஆயுள், சராசரியாக 400 பக்கங்களாகவும், திட்டவிலக்கம் 20 பக்கங்கள் எனக் கூறுகிறது.ஒரு முகவர் 100 பேனாக்களைக் கொள்முதல் செய்து சோதனைக்கு உட்படுத்துகின்றார். அதன சராசரி (எழுதும்) ஆயுள் 390 பக்கங்கள் எனக் கண்டறிகிறார். கொள்முதல் முகவர் நிறுவனத்தின் கூற்றை 1% மிகைகாண் நிலையில் நிராகரிக்கலாமா?

தீர்வு:

கூறின் அளவு n = 100,

முழுமைத் தொகுதி சராசரி = $\mu = 400$ பக்கங்கள்	கூறு சராசரி = $\bar{x} = 390$ பக்கங்கள்
முழுமைத் தொகுதி திட்டவிலக்கம் S.D. = σ =20பக்கங்கள்	S = 3.5-

இன்மை கருதுகோள் $H_0: \mu = 400$ என்க.

மாற்று கருதுகோள் : $H_1: \mu \neq 400$ (இருமுனை சோதனை)

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 1\% = 0.01$

கூறுபண்பளனை சோதனை க்கேற்ப கணக்கிடல்

$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1);\ \ Z = \frac{390-400}{\frac{20}{\sqrt{100}}} = \frac{-10}{2} =- 5,$

$\therefore |Z| = 5\ \ \&\ Z_{\alpha/2} = 2.58$

$|Z|\ > Z_{\alpha/2}$ அதாவது $5 > 2.58$.

முடிவு : $|Z| > Z_{\alpha/2}$

1% மிகைகாண் நிலையில்,, இன்மை கருதுகோள் H_0 நிராகரிக்கப்படுகிறது. எனவே $\mu \neq 400$ என தீர்மானித்து நிறுவனத்தின் கூற்றை 1% நிலையில் நிராகரிக்கலாம்.

Example 8.17

ஒரு பல்பொருள் அங்காடியில் ஒரு வாரத்தில் விற்பனை செய்யப்பட்ட சோப்பின் சராசரி 146.3 ஆக உள்ளது. விளம்பரத்திற்கு பிறகு 400 கடைகளை மாதிரி எடுத்ததில் வாராந்திர சராசரி விற்பனை 153.7 மற்றும் அதன் திட்டவிலக்கம் 17.2 எனில், விளம்பர பிரச்சாரம் வெற்றியடைந்ததாக கருதலாமா?

தீர்வு: கூறின் அளவு n = 400 கடைகள்

முழுமைத் தொகுதி சராசரி = $\mu = 153.7$	கூறு சராசரி = $\bar{x} = 146.3$
முழுமைத் தொகுதி திட்டவிலக்கம் S.D. = $\sigma = s = 17.2$	S = 17.2

இன்மை கருதுகோள் $H_0: \mu = 146.3$

மாற்று கருதுகோள் $H_0: \mu > 146.3$

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 0.05$

கூறுபண்பளவ சோதனைக்கு ஏற்பக் கணுக்கிடல்

$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1) = \frac{153.7-146.3}{\frac{17.2}{\sqrt{400}}} = \frac{7.4}{0.86} = 8.605$

$\therefore |Z|\ = 8.605$

$Z > Z_{\alpha}$, $8.605 > 1.645$

5% மிகைகாண் நிலையில் இன்மை கருதுகோள் H_0 மறுக்கப்படுகிறது. எனவே விளம்பர பிரச்சாாம் சோப்பு விற்பனையை அதிகரித்துள்ளது என கருதலாம்.

Example 8.18

இயல்நிலை பரவலில் உள்ள ஒரு தொழிற்சாலை ஊழியர்களின் ஊதியங்களின் சராசரி m மற்றும் மாறுபாட்டளவை 25 என்க. 50 பணியாளர்கள் கொண்ட ஒரு கூறில் உள்ளவர்களின் மொத்த ஊதியம் ₹2,550 என்க. கருதுகோள், μ = 52, என்பதையும் அதற்கு மாறான கருதுகோள் μ = 49 யையும் 1% மிகைகாண் நிலையில் சோதனை செய்க.

தீர்வு: கூறு அளவு $n = 50$ ஊழியர்கள்

மொத்த ஊதியம் $\Sigma x = 2550$

கூறு சராசரி $\bar{x} = \frac{\text{மொத்த ஊதியம்}}{n} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2550}{50} = 51$

முழுமைத் தொகுதி சராசரி = $\mu = 52$	கூறு சராசரி = $\bar{x} = 51$
முழுமைத் தொகுதி திட்டவிலக்கம் S.D. = $\sigma = 5$	

இன்மை கருதுகோள் $H_0: \mu = 52$

மாற்று கருதுகோள் $H_1: \mu \neq 52$ (இருமுனை)

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 0.01$ & $\mathbf{Z_{\alpha/2} = 2.58}$

கூறுபண்பளனை சோதனை $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

$Z = \frac{51-52}{\frac{5}{\sqrt{50}}} = \frac{-1}{0.7071} = -1.4142$

எனவே $|Z| = 1.4142$ எனப் பெறுகிறோம்

தீர்மான மதிப்பு 1% மிகைகாண் நிலையில் $Z_{\alpha/2} = 2.58$

முடிவு: கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பானது அட்டவணை மதிப்பை விட குறைவாக உள்ளது. $|Z| < Z_{\alpha/2}$,

1% மிகைகாண் நிலையில் இன்மை கருதகோள் H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது

Example 8.16

(i) 900 பேர் கொண்ட ஒரு கூறின் சராசரி 3.4 செ.மீ. ஆகவும், திட்டவிலக்கம் 2.61 செ.மீ. ஆகவும் உள்ளது. சராசரி 3.25 செ.மீ. மற்றும் திட்டவிலக்கம் 2.62 செ.மீ. கொண்ட ஒரு பெரிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அக்கூறு எடுக்கப்பட்டதா? என சோதிக்க.

(ii) இயல் நிலையில் உள்ள ஒரு முழுமைக் தொகுதியின் சராசரி தெரியாத நிலையில், உண்மை சராசரியின் 95% மற்றும் 98% நம்பிக்கை எல்லைகளை காண்க.

தீர்வு:

(i) கூறு அளவு : $n = 900$,

முழுமைத் தொகுதி சராசரி = $\mu = 3.25$ செ.மீ	கூறு சராசரி = $\bar{x} = 3.4$ செ.மீ
முழுமைத் தொகுதி திட்டவிலக்கம் S.D. = σ =2.61 செ.மீ	S = 2.61 செ.மீ

இன்மை கருதுகோள் $H_0: \mu = 3.25$ செ.மீ.

மாற்று கருதுகோள் $H_1: \mu \neq 3.25$ செ.மீ.

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\% = 0.05$ & $\mathbf{Z_{\alpha/2} = 1.96}$

கூறுபண்பளவை சோதனைக்கு ஏற்பக்கணக்கிடல்:

$$Z = \frac{3.4 - 3.25}{\frac{2.61}{\sqrt{900}}} = \frac{0.15}{0.087} = 1.724$$

$\therefore |Z| = 1.724$ $Z < Z_{\alpha/2}$ அதாவது $1.724 < 1.96$.

முடிவு: கணக்கிடப்பட்ட 5% மதிப்பானது, அட்டவணை மதிப்பைவிட குறைவாக உள்ளது. அதாவது 5% மிகைகாண் நிலையில் $Z < Z_\alpha$ ஆக உள்ளதால். இன்மை கருதுகோள் ஆனது ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது.

(ii) **நம்பிக்கை எல்லைகள்** (Confidence limits)

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி μ விற்கான 95% நம்பிக்கை எல்லைகள் :

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}SE \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2}SE$$

$3.4 - (1.96 \times 0.087) \leq \mu \leq 3.4 + (1.96 \times 0.087)$

$3.229 \leq \mu \leq 3.571$

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி μ விற்கான 98% நம்பிக்கை எல்லைகள் :

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}SE < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}SE$$

$3.4 - (2.33 \times 0.087) < \mu < 3.4 + (2.33 \times 0.087)$

$3.197 < \mu < 3.603$

எனவே, μ – இன் 95% நம்பிக்கை இடைவெளி (3.229,3.571) மற்றும் 98% நம்பிக்கை இடைவெளி (3.197,3.603) ஆகும்.

Example 8.19

அவசர மருத்துவ சிகிச்சை வாகன சேவை வழங்கும் ஒரு நிறுவனம், தங்களுக்கு கிடைக்கப் பெறும் அவசர அழைப்பின் போது சராசரியாக 8.9 நிமிடங்களில் அழைப்பிடத்தை சென்றவடைவதாக கூறுகிறது. அவர்களின் கூற்றை சோதிக்க, எடுக்கப்பட்ட 50 அவசர அழைப்பின் மாதிரி தேர்வுகளில் அதன் சராசரி 9.3 நிமிடங்கள், திட்டவிலக்கம் 1.6 நிமிடங்கள் என அறியப்படுகிறது. 5% மிகைகாண் நிலையில் நிறுவனத்தின் கூற்று சரியானதா?

தீர்வு:

கூறு அளவு $n = 50$

கூறு சராசரி $\bar{x} = 9.3$ நிமிடங்கள்

கூறு திட்டவிலக்கம் $s = 1.6$ நிமிடங்கள்

முழுமைத் தொகுதி சராசரி $\mu = 8.9$ நிமிடங்கள்

இன்மை கருதுகோள் $H_0: \mu = 8.9$

மாற்று கருதுகோள் $H_1: \mu \neq 8.9$ (Two tail)

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 0.05$

கூறுபண்பளவை சோதனைக்கு

$Z = \frac{\frac{\sigma}{x} - \mu}{\frac{\sqrt{n}}{9}} \sim N(0,1)$

$Z = \frac{9.3-8.9}{\frac{1.6}{\sqrt{50}}} = \frac{0.4}{0.2263} = 1.7676$

கணுக்கிடப்பட்ட மதிப்பு $Z = 1.7676$

5% மிகைகாண் நிலையில் தீர்மான மதிப்பு $Z_{\alpha/2} = 1.96$

முடிவு: கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பானது அட்டவணை மதிப்பை விட குறைவாக உள்ளது. அதாவது, $Z < Z_\alpha$5% மிகைகாண் நிலையில் இன்மை கருதகோள் ஏற்கப்படுகிறது எனவே நோயுற்றோரை ஏற்றிச் செல்லும் வண்டிசேவை சராசரி 8.9 நிமிடங்களில் அவசர அழைப்பிடத்தை சேரும் என்ற கூற்று உண்மையாகிறது.

அத்தியாயம் - 9
பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல்
(2, 3 and 5 மதிப்பெண்கள்)

பயிற்சி 9.1

2 மதிப்பெண்கள் :

கேள்வி1. காலம்சார் தொடர் வரிசையை வரையறு

விடை :

ஒரு காலம் சார் தொடர்பானது கண்டறிந்த பதிவுகளின் தொகுப்பை காலவரிசையில் (ஏறு வரிசையில் அல்லது இறங்கு வரிசையில்) உள்ளடக்கியதாகும். காலம்சார் வரிசையின் முக்கிய நோக்கமானது விவரங்களின் வேறுபாடுகளைக் கண்டறிந்து வேறுபாடுகளை நீக்க முயற்சிப்பதற்கும், எதிர்கால மதிப்பீடுகளை மதிப்பிடுவதற்கும் மற்றும் அவற்றைக் கணிக்கவும் உதவுகிறது.

கேள்வி2. காலம்சார் தொடர் வரிசையைக் கற்பதன் அவசியம் என்ன?

விடை : i) கடந்த கால நடவடிக்கைகளை பகுப்பாய்வு செய்வதற்கு

ii) எதிர்கால அம்சங்களை கணிப்பதற்கும் மற்றும் திட்டமிடுவதற்கும் உதவுகிறது.

iii) நிகழ்கால செயல்பாடுகளை மதிப்பீடு செய்வதற்கு

iv) காலம்சார் தொடரானது ஒரு குறிப்பிட்ட கால வரைவுகளை மற்ற கால வரைவுகளுடன் ஒப்பிட்டு ஆய்வுகள் செய்ய உதவுகிறது.

கேள்வி3. காலம்சார் தொடாட வரிசையின் பயன்பாட்டை குறிப்பிடுக.

விடை: காலம்சார் தொடர்வரிசையின் முக்கிய நோக்கமானது விவரங்களின் வேறுபாடுகளைக் கண்டறிந்து வேறுபாடுகளை நீக்க முயற்சிப்பதற்கும், எதிர்கால மதிப்பீடுகளை மதிப்பிடுவதற்கும் மற்றும் அவற்றைக் கணிக்கவும் உதவுகிறது.

கேள்வி4. காலம்சார் தொடர் வரிசையின் கூறுகளைக் குறிப்பிடுக.

விடை : ஒரு காலம்சார் தொடரில் நான்கு வகைக் கூறுகள் உள்ளன. அவை பின்வருமாறு:

i.நீள் காலப் போக்கு ii.பருவகால மாறுபாடுகள்

iii.சுழற்சி மாறுபாடுகள் iv.சீரற்ற மாறுபாடுகள்

கேள்வி 5. நீள் காலப்போக்கு வரையறு.

விடை : நீள் காலப் போக்கு என்பது ஒரு நீண்டகால இடைவெளியில் அதிகரிக்கும் அல்லது குறையும் அல்லது தேக்கமளிக்கும் ஒரு காலம்சார் தொடரின் பொதுவான போக்கு ஆகும். பொதுவாக, நாட்டின் மக்கள் 'தொகை, தொழிற்சாலைகளின் உற்பத்தி விற்பனை, பொருளின் விலை, தனி நபரின் வருமானம் போன்றவைகள் அதிகரிக்கக் கூடியப்போக்கைக் கொண்டிருக்கும். மரணம், தொற்றுநோய், மின் அலை இயந்திர கருவிகள், நீர் ஆதாரங்கள், இறப்பு விகிதம் போன்றவற்றில் இப்போக்கானது ஒரு கீழ்நோக்குப் போக்காக காணப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட காலப்பகுதியில் ஏற்ற அல்லது இறக்கங்கள் ஒரே திசையில் இருக்க வேண்டும் என்பது அவசியமில்லை.

கேள்வி 7. **சுழல் மாறுபாடுகள் என்பதை விளக்குக.**

விடை : சுழற்சி மாறுபாடுகள் சீரான காலம்சார் ஒழுங்கிற்கு அமையத் தேவையில்லை. அதாவது சுழற்சி மாறுபாடு சமமான இடைவெளிக்குப் பின்னர் அல்லது இதே போன்ற சரியான வடிவங்களை பின்பற்றாமல் இருக்கலாம். பொதுவாக ஒரு சுழற்சிகாலம் என்பது 7 முதல் 9 ஆண்டுகள் வரையிலானது. சுழற்சிக்கான காலப் பகுதியை ஆண்டுகளின் நிலைப்பாட்டில் கட்டாயப்படுத்த முடியாது.

எடுத்துக்காட்டாக, அரசு நிதிக் கொள்கைகளின் மாற்றங்கள், வட்டி விகிதங்களில் மாற்றங்கள் ஆகியவற்றிற்கான ஒவ்வொரு வர்த்தக சுழற்சியும் துவக்கம் - அபிவிருத்தி – வீழ்ச்சி – மீட்சி – பராமரிப்பு போன்றவைகளை பெற்றிருக்கும்.

8. **கேள்வி: ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் பற்றி விவாதிக்கவும்.**

விடை : சீரற்ற மாறுபாடுகளுக்கு குறிப்பிட்ட வடிவமைப்பு கிடையாது மற்றும் இவற்றின் நிகழ்வுகளுக்கு வழக்கமான நேரத்திற்கான காலஅளவு என எதுவும் கிடையாது. இவை தற்செயலாக நிகழும் மாற்றங்கள் ஆகும். இவை முற்றிலும் ஒழுங்கற்ற, கணிக்க முடியாத குறுகியகால மாறுபாடுகள் ஆகும். சில சமயங்களில் அதன் நிகழ்வில் புதிய சுழற்சிகளையோ அல்லது மாறுபாடுகளின் மற்ற இயக்கங்களையோ அதிகரிக்கச் செய்வதாலேயே அதன் விளைவு மிகவும் தீவிரமாகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, வெள்ளம், போர்கள், பூகம்பங்கள், சுனாமி, வேலை நிறுத்தங்கள், கதவடைப்புகள் போன்றவைகள்.

கேள்வி9. பருவகால குறியீட்டை வரையறுக்க.

விடை :ஒவ்வொரு பருவத்திற்கும் பருவகால குறியீட்டைக் கணக்கிடுதல்

மாதங்கள், காலாண்டுகள் அல்லது ஆண்டுகள் கொடுக்கப்பட்டால்

பருவகால குறியீடு(S.I) $= \frac{\text{பருவகால சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$

புள்ளி விவரங்கள் மாதந்தோறும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

பருவகால குறியீடு(S.I) $= \frac{\text{மாத சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$

புள்ளி விவரங்கள் காலாண்டுதோறும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

பருவகால குறியீடு(S.I) $= \frac{\text{காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$

கேள்வி11.

நேர்க்கோடு பொருத்துதலில் பயன்படுத்தப்படும் இரு இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளை கூறுக.

விடை :

இரு இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள்

$$\Sigma Y = na + b\Sigma X$$

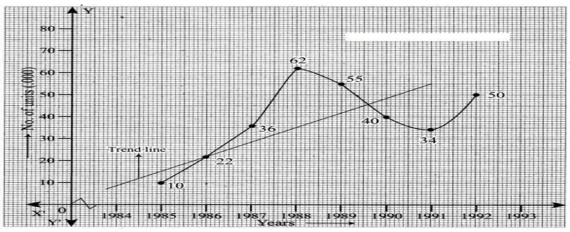
$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

கேள்வி16.

தொழில் துறையில் 1985 மற்றும் 1991 இடைப்பட்ட ஆண்டுகளில் பதிவு செய்யப்பட்ட சிறுதொழில் நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. போக்குக்கோட்டின் மீது இதன் வளர்ச்சியை வரைபட முறையில் காட்டுக.

ஆண்டுகள்	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
அலகுகளின் எண்ணிக்கை (in'000)	10	22	36	62	55	40	34	50

தீர்வு:



பயிற்சி : 9.2

கேள்வி1. குறியீட்டு எண் என்பதை வரையறுக்க.

விடை :

ஒரு குறியீட்டு எண் என்பது அதன் மாறுபாடுகள் மூலம் துல்லியமான அளவீடுகள் அல்லது நடைமுறையில் நேரடியாக மதிப்பீடு செய்ய முடியாத அளவுகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களைக் காட்டும் ஒரு சாதனமாகும்". - வெல்டன்

"ஒரு குறியீட்டு எண் என்பது ஒரு மாறியின் ஏற்ற இறக்கங்களின் ஒரு புள்ளியியல் அளவீடு ஆகும். **Lawrence J Kalpan**

கேள்வி 2. குறியீட்டு எண்ணின் பயன்பாட்டை விவரிக்க.

விடை : i.முடிவுகள் மற்றும் நிர்வாகக் கொள்கைகளை அமைப்பதற்கு இது ஒரு முக்கியமான கருவியாகும்.

ii.இது போக்குகள் மற்றும் போக்கு அளவைகளை அறிய உதவுகிறது.

iii.இது ஒரு பொருளாதாரத்தின் வீக்கம் மற்றும் பணவாட்டத்தைத் தீர்மானிக்கிறது.

கேள்வி3. குறியீட்டு எண் வகைப்படுத்தலைக் குறிப்பிடவும்.

விடை : குறியீட்டு எண்களை பின்வருமாறு வகைப்படுத்த முடியும்.

1. விலைக் குறியீட்டு எண்

சில்லறை அல்லது மொத்த விலையில் ஏற்படும் ஒரு குறிப்பிட்ட மாற்றத்தை அல்லது தொகுப்புபொருள்களின் விலை குறியீட்டு எண்ணின் பொதுவான மாற்றங்களை அளவிடுவதற்கான குறியீடு ஆகும்.

2.எண்ணளவு குறியீட்டு எண்: ஒரு தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்படும் பொருள்களின் அளவுகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடுதற்கான குறியீடு ஆகும்.

3. வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண்

வெவ்வேறு வர்க்க மக்களின் வாழ்க்கைத் தர செலவில் விலை சார்ந்த மாற்றத்தின் விளைவுகளை அறிவதற்காக இவை உருவாக்கப்பட்டுள்ளன.

கேள்வி 4: லாஸ்பியரின் விலை குறியீட்டு எண் என்பதை வரையறுக்க.

விடை : லாஸ்பியர் விலைக் குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

P_1 - நடப்பு ஆண்டின் விலை

P_O அடிப்படை ஆண்டின் விலை

q_1 நடப்பு ஆண்டின் அளவு

q_0 அடிப்படை ஆண்டின் அளவு

லாஸ்பியரின் விலைக் குறியீட்டு எண்ணில், அடிப்படை ஆண்டின் அளவைகள் q_0, நிறையாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

கேள்வி 5: பாசியின் விலை குறியீட்டு எண்ணை விளக்கவும்,

விடை : பாசியின் விலைக் குறியீட்டு எண்,

$$P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100$$

இங்கு P_1 - நடப்பு ஆண்டின் விலை

P_O அடிப்படை ஆண்டின் விலை

q_1 நடப்பு ஆண்டின் அளவு

q_0 அடிப்படை ஆண்டின் அளவு

பாசியின் விலைக் குறியீட்டு எண்ணில், நடப்பு ஆண்டின் அளவைகள்(q_1), நிறையாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

கேள்வி 6. ஃபிஷரின் விலை குறியீட்டு எண் பற்றி குறிப்பு எழுதுக.

விடை : ஃபிஷரின் விலைக் குறியீட்டு எண் என்பது லாஸ்பியர் மற்றும் பாசியின் விலைக் குறியீட்டு எண்களின் பெருக்கு சராசரி ஆகும். எனவே அதன் விலைக் குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L} \text{x}\, P_{01}^{L}} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \times \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \times \sum p_0 q_1}} \times 100$$

கேள்வி7 :.குறியீட்டு எண்ணின் போதுமான தன்மையை சோதிக்கும் சோதனைகளை எழுதுக.

விடை : குறியீட்டு எண்களானது ஏதேனும் இரண்டு ஆண்டுகளை ஒப்பிடும் போது, விலை மற்றும் அளவு ஆகியவற்றில் காணப்படும் மாற்றங்களை அறிந்து கொள்வதற்கு பயன்படுகின்றன. ஒரு குறியீட்டு எண்ணின் போதுமான தன்மையை சோதிப்பதற்கு இரண்டு சோதனைகள் உள்ளன. அவை பின்வருமாறு

i.காலமாற்றுச் சோதனை

ii.காரணி மாற்றுச் சோதனை

ஒரு சிறந்த குறியீட்டு எண்ணின் அளவுகோள என்பது மேலே உள்ள இரண்டு சோதனைகளை நிறைவு செய்வது என்பதாகும்.

கேள்வி 8. **காலமாற்றுச் சோதனையை வரையறுக்க.**

விடை : காலமாற்றுச் சோதனை என்பது ஒரு சிறந்த குறியீட்டு எண்ணின் நிலைத் தன்மையை சோதிக்கும் ஒரு முக்கியமான சோதனை ஆகும். இச்சோதனையானது நேரத்தின், நிலைத்தன்மையைப் பராமரிக்க முன்னோக்கிய மற்றும் பின்னோக்கிய காலத்தைப் பொறுத்து செயல்படும். இது, பின்வரும் தொடர்பினை நிறைவு செய்ய வேண்டும்,

$$P_{01} \times P_{10} = 1$$

ஃபி~ரின் குறியீட்டு எண் சூத்திரம் மேலே உள்ள தொடர்பை பூர்த்தி செய்கிறது.

$$P_{01}^{F} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \times \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \times \sum p_0 q_1}} \;\&\; P_{10}^{F} = \sqrt{\frac{\sum p_0 q_1 \times \sum p_0 q_0}{\sum p_1 q_1 \times \sum p_1 q_0}} \;\&\; P_{01}^{F} \times P_{10}^{F} = 1$$

அடிப்படை ஆண்டு மற்றும் நடப்பு ஆண்டினைப் பரிமாற்றம் செய்யும்போது நாம் பெறுவது

கேள்வி 9. காரணி மாற்றுச் சோதனை விளக்கவும்.

விடை :காரணி மாற்றுச் சோதனை என்பது ஒரு சிறந்த குறியீட்டு எண்ணின் நிலைத்தன்மையை சோதிக்கும் மற்றொரு சோதனை ஆகும். உண்மை மதிப்பு விகிதமானது அடிப்படை ஆண்டு முதல் நடப்பு ஆண்டு வரை உள்ள விலை குறியீட்டு எண் மற்றும் எண் அளவு குறியீட்டு எண்ணின் பெருக்குத் தொகைக்கு சமம் ஆகும். அதாவது, நடப்புக் காலத்தின் மொத்த மதிப்பு மற்றும் அடிப்படை காலத்தின் மொத்த மதிப்பின் விகிதமாக, உண்மை மதிப்பு விகிதம் கண்டறியப்படுகிறது. காரணி மாற்றுச் சோதனை பின்வருமாறு வழங்கப்படுகிறது.

இங்கே, $P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

இப்போது, P க்கு பதிலாக Q வை பரிமாற்றம் செய்தால், நாம் பெறுவது

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0 \times \sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0 \times \sum q_0 p_1}}$$

இங்கே, விலை ஒப்பீட்டு மாற்றம் ஆகும். அளவு ஒப்பீட்டு மாற்றம் ஆகும்.

கேள்வி10. உண்மை மதிப்பீட்டு விகிதத்தை வரையறுக்கவும்.

விடை :நடப்பு ஆண்டின் மொத்த மதிப்பிற்கும் அடிப்படை ஆண்டின் மொத்த மதிப்பிற்கும் உள்ள விகிதம் உண்மை மதிப்பீட்டு விகிதம் ஆகும்.

(உண்மை மதிப்பீட்டு விகிதம்)

கேள்வி 11. வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணைப் பற்றி விளக்குக.

விடை :அடிப்படை காலத்துடன் ஒப்பிடுகையில் தற்போதைய காலத்திற்கு நுகர்வோர்கள் மற்றும் சேவைகளின் விலையில் ஏற்படும் மாற்றங்களின் விளைவுகளை ஆய்வு செய்ய வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டு எண் கட்டமைக்கப்பட்டுள்ளது.

ஏதேனும் இரண்டு காலத்திற்கு இடையே வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண்ணின் மாற்றம் என்பது இரு காலங்களில் அதே வாழ்க்கைத் தரத்தை பராமரிக்க அவசியமான வருமான மாற்றமே ஆகும். எனவே வாழக்கைத்தர குறியீட்டு எண், அதே வாழ்க்கைத்தரத்தை பராமரிக்கக்கூடிய சராசரி வருமான அதிகரிப்பை அளவிடக்கூடியதாகும்.

மேலும், மக்களின் நுகர்வு பழக்கம் பரவலாக வேறுபடுகிறது. மேலும் இடத்திற்கு இடம் வேறுபடுகிறது. விலையில் ஏற்படும் மாற்றங்களானது பல்வேறு வகைப்பட்ட மக்களை பாதிக்கிறது, இதன் விளைவாக பொதுவிலைக் குறியீட்டு எண்கள், வெள;வேறு வர்க்க மக்களின் வாழ்க்கை செலவில் மாற்றங்களின் விளைவுகளை எதிரொலிக்கத் தவறுகிறது.

எனவே, வாழ்க்கை தர குறியீட்டு எண் ஆனது பல்வேறு மக்கள் நுகரும் பொருள்களின் பொதுவான விலையில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடப் பயன்படுகிறது. நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்ணானது வாழ்க்கைக் குறியீட்டு செலவு என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

கேள்வி 12. குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை வரையறுக்க.

விடை :குடும்ப வரவு செலவு திட்ட முறையில் அடிப்படை ஆண்டின் விலைகள் மற்றும் அளவை பெருக்குவதன் மூலம் நிறைகள் கணக்கிடப்படுகின்றன. அதாவது,

வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டு எண் = $\frac{\Sigma PV}{\Sigma V}$

இங்கு தொடர்பு விலை = $P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$

உருப்படியின் நிறை மதிப்பு = $V = \Sigma p_0 q_0$

கேள்வி13. வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணின் பயன்பாட்டை எழுதுக.

விடை :i)ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் பணியாளர்களின் ஊதியம் உண்மையாக அதிகரிக்கிறதா அல்லது வீழ்ச்சி அடைகிறதா என்பதை அறிய பயன்படுகிறது.

ii)நிர்வாகமானது, தொழிலாளர்களின் ஊதியத்திற்கான அகவிலைப்படியை சீர்படுத்த அல்லது ஊக்கத் தொகை வழங்க பயன்படுகிறது.

பயிற்சி 9.3

கேள்வி 1.

புள்ளிவிவர தரக்கட்டுப்பாடு என்பதை வரையறு.

விடை : தரக்கட்டுப்பாடு என்பது பொருள்கள், செயலாக்கம், இயந்திரங்கள் ஆகியவற்றில் காணப்படும் தரக்குறைபாட்டைக் கண்டுபிடிக்க உதவும் வலிமை வாய்ந்த உத்தியாகும். உற்பத்தி செய்யப்பட்ட இறுதி பொருள்கள் நுகர்வோரிடமிருந்து எதிர்பார்க்கக்கூடிய தரத்தைப் பெற்றிருப்பது அவசியமாகும்.

கேள்வி 2.

உற்பத்தி செயல்முறையில் மாறுபாட்டிற்கான காரணங்களின் வகைகளைக் குறிப்பிடுக.

விடை :ஒரு பொருளின் தரத்தை நிர்ணயிக்கும் மாறுபாட்டின் காரணங்கள் இரண்டு வகைப்படுகிறது. அவை:

1.வாய்ப்பு காரணங்கள்

2.குறிப்பிட்ட காரணங்கள்

கேள்வி 3.

தற்செயல் காரணங்கள் என்பதை வரையறு.

விடை :வாய்ப்பு காரணங்கள் என்பது உற்பத்தி செயல் முறைகளில் இயற்கையாகவோ அல்லது இயல்பாகவோ ஏற்படும் சிறிய மாறுபாடுகள் மனித கட்டுப்பாட்டிற்கு அப்பாற்பட்டதாகும். இதைத் தடுக்கவோ, அகற்றவோ எந்த சூழ்நிலைகளிலும் முடியாது. பொருள்களின் தரத்திற்கு எந்தவித பாதிப்பையும் ஏற்படுத்தாத சிறிய விளைவுகள் வாய்ப்பு காரணங்கள் என அழைக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக மழை, வெள்ளம், மின்தடை போன்றவை ஆகும்.

கேள்வி 4.

குறிப்பிட்ட காரணங்கள் என்பதை வரையறு.

விடை :குறிப்பிட்ட காரணங்கள் என்பது எந்தவொரு உற்பத்தி செயல்களிலும் ஏற்படும் இரண்டாவது வகை மாறுபாடாகும். இந்த குறிப்பிட்ட காரணங்கள் மூலப்பொருள்கள் பெறுவதிலிருந்து இறுதியாக உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள் நுகர்வோரிடம் அளிக்கும் வரை செயல் முறையின் எந்த கட்டத்திலும் நிகழலாம்.

உதாரணமாக குறைபாடுள்ள மூலப்பொருள்கள், இயந்திரங்களில் தவறு, திறமையற்ற மனித ஆற்றல், பழுதடைந்த கருவிகள், புதிய செயல்பாடு ஆகியவை குறிப்பிட்ட காரணங்களின் முக்கிய காரணிகள் ஆகும்.

கேள்வி: 5

உற்பத்தி கட்டுப்பாட்டைப் பற்றி நீங்கள் என்ன கருதுகிறீர்கள்?

விடை :உற்பத்தி கட்டுப்பாடு என்பது ஆய்வு திட்டங்களின் வாயிலாக உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருளின் தரத்தை கூறெடுத்தல் முறையில் சோதனை செய்வதாகும். உற்பத்தி கட்டுப்பாட்டின் நோக்கம் தமது வாடிக்கையாளர்களுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட தர அளவை உத்திரவாதத்துடன் கொடுப்பதாகும். விற்கப்பட்ட பொருட்களில், குறைபாடுள்ள பொருள்கள் மிகுதியாக இருக்காது என்பதை உறுதிப்படுத்த முயற்சிக்கிறது.

கேள்வி6.

நீங்கள் செயல்முறை கட்டுப்பாட்டைப் பற்றி நீங்கள் என்ன கருதுகிறீர்கள்?

விடை :உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருளின் நிறைவான தர அளவை கட்டுப்படுத்துவது மற்றும் பராமரிப்பது ஆகியவை உற்பத்தி செயல்முறையின் முக்கிய நோக்கம் ஆகும். இது செயல்முறைக் கட்டுப்பாட்டின் மூலமே சாத்தியமாகும். செயல்முறை கட்டுப்பாட்டில், உற்பத்தி செயல்முறை மூலம் குறைபாடுள்ள பொருள்களின் விகிதம் குறைக்கப்படவேண்டும். இது கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்களின் உத்தியின் மூலம் பெறப்படுகிறது.

கேள்வி 7.

கட்டுப்பாடு வரைபடங்கள் என்பதை வரையறுக்கவும்.

விடை :செயல்முறை கட்டுப்பாட்டில் பயன்படுத்தப்படும் புள்ளிவிவர படம் கட்டுப்பாட்டு வரைபடமாகும். தரவுகளில் உள்ள வடிவ மாறுபாடுகளைக் கண்டறிவதற்கு ஒரு எளிய உத்தியாகும். கட்டுப்பாட்டு விளக்கப்படங்கள் எளிமையாக வடிவமைக்கக் கூடியது மற்றும் எளிதாக விளக்கக் கூடியது.

கேள்வி 8:

மாறிகளுக்கான கட்டுப்பாடு வரைபடங்களைக் குறிப்பிடவும்.

விடை :மாறிகளுக்கான இருவகையான கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்கள்:

1. சராசரி வரைபடங்கள்(X)
2. வீச்சு வரைபடங்கள்(R)

கேள்வி 9.

சராசரி வரைபடங்கள் என்பதை வரையறு.

விடை :கொடுக்கப்பட்ட செயல்பாட்டில் இருந்து பெறப்பட்ட கூறுகளின் சராசரி தரத்தைக் காண்பதற்கு இந்த விளக்கப்படம் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

கேள்வி 10. வீச்சு வரைபடங்கள் வரையறு.

விடை :வீச்சு விளக்கப்படம் கொடுக்கப்பட்ட செயல்முறையிலிருந்து பெறப்பட்ட கூறுகளின் மாறுபாடு அல்லது சிதறலைக் காண்பிக்க இவ்வரைபடம் பயன்படுகிறது.

கேள்வி 11.

புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாட்டின் பயன்கள் யாவை?

விடை :ஆட்டோமொபைல், ஜவுளி, மின் உபகரணங்கள், பிஸ்கட், குளியல் சோப்புகள், இரசாயனங்கள், பெட்ரோலியப் பொருட்கள் போன்ற அனைத்து உற்பத்தி தொழிற்சாலைகளிலும் தரக்கட்டுப்பாட்டை நிர்ணயிக்க உதவுகிறது. புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டின் நோக்கம் குறிப்பிட்ட காரணங்களை நீக்குவது மற்றும் உற்பத்தி கட்டுப்பாட்டின் கீழ் கொண்டு வருவதற்கான புள்ளியியல் உத்திகளை வழங்குவதாகும்.

கேள்வி 12.

சராசரி விளக்கப் படத்திற்கான கட்டுப்பாடு வரம்புகளை எழுதுக.

விடை :வரைபடங்களின் கட்டுப்பாட்டில் வரம்புகளைக் கீழ்க்கண்ட வகைகளில் கணக்கிடலாம்.

வகை (i) $\bar{X}$ மற்றும் திட்ட விலக்கம் கொடுக்கும்போது	வகை (ii) $\bar{X}$ மற்றும் திட்ட விலக்கம் கொடுக்கப்படாத போது
$UCL = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$
$CL = \bar{\bar{X}}$	$CL = \bar{\bar{X}}$
$LCL = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$

கேள்வி13. வீச்சு விளக்கப் படத்திற்கான கட்டுப்பாடு வரம்புகளை எழுதுக.

விடை :இரு வேறுபட்ட சூழ்நிலைகளில், வீச்சு வரைபடங்களின்() வரம்புகளைக் கணக்கிடுவது

வகை (i) திட்ட விலக்கம் கொடுக்கும்போது	வகை (ii) திட்ட விலக்கம் கொடுக்கப்படாத போது
$UCL = \bar{R} + 3\sigma_R$	$UCL = D_4\bar{R}$
$CL = \bar{R}$	$CL = \bar{R}$
$LCL = \bar{R} - 3\sigma_R$	$LCL = D_3\bar{R}$

3 - மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 9.1

கேள்வி6.

பருவகால மாறுபாட்டின் மீது ஒரு சுருக்கமான குறிப்பு எழுதுக.

தீர்வு:

விடை : பருவகால வேறுபாடு என்பது ஒவ்வொரு பருவத்திலும் குறிப்பிட்டகால முறையில் மீண்டும் மீண்டும் உருவாகிறது. இந்த வேறுபாடுகள் ஒரு வருடத்திற்கும் குறைவான காலத்திற்குள் மீண்டும் மீண்டும் ஏற்படுகின்றன. இது குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் அளவிடப்படுகிறது. பருவகால வேறுபாடுகள் இயற்கை சக்திகள், சமூகபழக்கங்கள் மற்றும் மரபுகள் ஆகியவற்றால் பாதிக்கப்படலாம். இந்த மாறுபாடுகள் அதன் காரணிகளின் முடிவுகளாகும். இது சீராக மற்றும் வழக்கமாக அதிகரித்தும், வீழ்ச்சியுற்றும் காணப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, மழைக் காலங்களில் குடைகள் மற்றும் மழைக்குப் பயன்படுத்தப்படும் உடைகள்(சுயinஉழயவ) விற்பனை, கோடைப் பருவத்தில் குளிர்பானங்களின் விற்பனை, பண்டிகை காலங்களில் ஆடைகள் வாங்குதல்.

கேள்வி10

ஒரு நேர்க்கோட்டைப் பொருத்தும் முறையை விளக்குக.

விடை :

i. ஒரு நேர்கோட்டு போக்கானது $Y = a + bX$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் குறிப்பிடலாம்
Y என்பது உண்மையான மதிப்பு
X என்பது காலம்
a, b என்பது மாறிலிகள் ஆகும்

Ii. இயல்நிலை சமன்பாடுகள்

$$\Sigma Y = na + b\Sigma X$$
$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

$n =$ மொத்த ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை

ii. போக்கு சமன்பாட்டில் மற்றும் ன் மதிப்புகளை பிரதியிடுவதன் மூலம் பொருத்தமான கோட்டை பெற முடியும்

$\Sigma Y = na + b(0);\ \ a = \frac{\Sigma Y}{n} = \bar{Y} \quad \Sigma XY = a(0) + b\Sigma X^2;\ \ b = \frac{\Sigma YY}{\Sigma X^2}$

பயிற்சி 9.2

கேள்வி12.

போக்கினை அளவிடுவதற்கான வெவ்வெறு முறைகளை குறிப்பிடுக.

விடை :

போக்கினை அளவிடுவதற்கான வெவ்வெறு முறை

(i) வரைபட முறை
(ii) பாதி சராசரி
(iii) நகரும் சராசரி
(iv) மீச்சிறு வர்க்க முறையில் நேர்கோடு பொருத்துதல்

கேள்வி14.

எட்டு ஆண்டுகளுக்கான வர்த்தக சம்பந்தமான இலாபங்களுடன் தொடர்புடைய புள்ளி விவரங்கள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டுகள்	1986	1987	1988	1989
இலாபம் (₹)	15,420	15,470	15,520	21,020
ஆண்டுகள்	1990	1991	1992	1993
இலாபம் (₹)	26,500	31,950	35,600	34,900

மூன்று ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி போக்கு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

ஆண்டு	லாபம் (₹)	மூன்று ஆண்டு நகரும் கூடுதல் (₹)	மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரி (₹)
1986	15420	…	…
1987	15470	46410	15470
1988	15520	52010	17336.667
1989	21020	63040	21013.333
1990	26500	79470	26490
1991	31950	94050	31350
1992	35600	102450	34150
1993	34900	…	…

கேள்வி15 .

ஐந்து ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரிகளின் மூலம் பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கான உற்பத்தி போக்கு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

ஆண்டுகள்	1979	1980	1981	1982	1983	1984
உற்பத்தி ('000)	126	123	117	128	125	124
ஆண்டுகள்	1985	1986	1987	1988	1989	1990
உற்பத்தி ('000)	130	114	122	129	118	123

தீர்வு:

ஆண்டுகள்	உற்பத்தி ('000)	5- ஆண்டு நகரும் கூடுதல்	5- ஆண்டு நகரும் சராசரி
1979	126	…	
1980	123	…	
1981	117	619	123.8
1982	128	617	123.4
1983	125	624	124.8
1984	124	621	124.2
1985	130	615	123
1986	114	619	123.8
1987	122	613	122.6
1988	129	606	121.2
1989	118	…	…
1990	123	…	

பயிற்சி 9.2

கேள்வி14.: கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான முறையில் விலைக் குறியீட்டு எண்ணை கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	2002		2012	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	10	20	16	10
B	12	34	18	42
C	15	30	20	26

தீர்வு:

பொருள்கள்	2002		2012		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
	விலை (p_0)	அளவு (q_0)	விலை (p_1)	அளவு (q_1)				
A	10	20	16	10	320	200	160	100
B	12	34	18	42	612	408	756	504
C	15	30	20	26	600	450	520	390
மொத்தம்					1532	1058	1436	994

லாஸ்பியர் விலைக் குறியீட்டு எண்

$P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100 = \frac{1532}{1058} \times 100 = 144.8$

பாசி இன் விலைக் குறியீட்டு எண்

$P_{01}^{p} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100 = \frac{1436}{994} \times 100 = 144.4$

கேள்வி20.

பின்வரும் குழு குறியீட்டு எண்கள் மற்றும் சராசரி தொழிலாளர் வர்க்க குடும்பத்தின் பட்ஜெட்டின் குழு நிறைகளுக்கான வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணை கட்டமைக்கவும்.

குழுக்கள்	உணவு	எரிபொருள்	ஆடை	வாடகை	இதர
குறியீட்டு எண்கள்	2450	1240	3250	3750	4190
எடை	48	20	12	15	10

தீர்வு:

குழுக்கள்	எடை (W)	குறியீட்டு எண்கள் (I)	WI
உணவு	48	2450	117600
எரிபொருள்	20	1240	24800
ஆடை	12	3250	39000
வாடகை	15	3750	56250
இதர	10	4190	41900
மொத்தம்	105		279550

வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்= $\frac{\sum WI}{\sum W} = \frac{279550}{105} = 2662.38$

கேள்வி21.

குடும்ப வரவு செலவுத்திட்ட முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் விவரங்களுக்கு 2012 ஆம் ஆண்டை அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு 2015-க்கான வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணைக் கட்டமைக்கவும்.

பொருள்கள்	விலை		நிறைகள்
	2012	2015	
அரிசி	250	280	10
கோதுமை	70	85	5
சோளம்	150	170	6
எண்ணெய்	25	35	4
பருப்பு	85	90	3

தீர்வு:

பொருள்கள்	விலை (Rs)		நிறைகள்	$P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	PV
	2012 (p_0)	2015 (p_1)			
அரிசி	250	280	10	112	1120
கோதுமை	70	85	5	121.43	607.15
சோளம்	150	170	6	113.33	679.98
எண்ணெய்	25	35	4	140	560
பருப்பு	85	90	3	105.88	317.64
மொத்தம்			28		3284.77

வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்= $\frac{\sum PV}{\sum V} = \frac{3284.77}{28} = 117.31$

கேள்வி22 .

மொத்த செலவு முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் விவரங்களுக்கு வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணைக் கண்டுபிடி.

பொருள்கள்	நிறைகள் 2010	விலை (₹)	
		2010	2015
P	80	22	25
Q	30	30	45
R	25	42	50
S	40	25	35
T	50	36	52

தீர்வு:

பொருள்கள்	விலை (Rs)		நிறைகள் (V)	$P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	PV
	2010 (p_0)	2015 (p_1)			
P	22	25	80	113.63	9090.4
Q	30	45	30	150	4500
R	42	50	25	119.05	2976.25
S	25	35	40	140	5600
T	36	52	50	144.44	7222
மொத்தம்			225		29388.65

வாழ்க்கை குறியீட்டு எண் $= \frac{\sum PV}{\sum V} = \frac{29388.65}{225} = 130.62$

---

5 - மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 9.1

கேள்வி13.: கீழ்க்கண்ட தொடருக்கு சராசரி பருவகாலப் போக்கைக் கணக்கிடுக.

வருடம்	காலாண்டு உற்பத்தி			
	I	II	III	IV
2002	3.5	3.8	3.7	3.5
2003	3.6	4.2	3.4	4.1
2004	3.4	3.9	3.7	4.2
2005	4.2	4.5	3.8	4.4
2006	3.9	4.4	4.2	4.6

தீர்வு:

வருடம்	காலாண்டு உற்பத்தி			
	I	II	III	IV
2002	3.5	3.8	3.7	3.5
2003	3.6	4.2	3.4	4.1
2004	3.4	3.9	3.7	4.2
2005	4.2	4.5	3.8	4.4
2006	3.9	4.4	4.2	4.6
மொத்தம்	18.6	20.8	18.8	20.8
சராசரி	3.72	4.16	3.76	4.16

சராசரிகளின் சராசரி $= \frac{3.72+4.16+3.76+4.16}{4} = 3.95$

1வது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு

$= \frac{\text{1 வது காலாண்டின் சராசரி}}{\text{சராசரிகளின் சராசரி}} \times 100 = \frac{3.72}{3.95} \times 100 = 94.1772$

2வது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு

$= \frac{4.16}{3.95} \times 100 = 105.3165$

3வது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு

$= \frac{3.76}{3.95} \times 100 = 95.1899$

4வது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு

$= \frac{4.16}{3.95} \times 100 = 105.3165$

<u>கேள்வி17.</u>

ஒரு பொருளின் ஆண்டு உற்பத்தி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

ஆண்டுகள்	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
உற்பத்தி ('000)	155	162	171	182	158	180	178

மீச்சிறு வர்க்க முறையில் நேர்க்கோட்டுப் போக்கினை பொருத்துக.

தீர்வு:

ஆண்டு (x)	உற்பத்தி ('000) (Y)	X= x-1998	X^2	XY	போக்கு மதிப்புகள் (Yt)
1995	155	-3	9	-465	159.57
1996	162	-2	4	-324	162.86
1997	171	-1	1	-171	166.14
1998	182	0	0	0	169.43
1999	158	1	1	158	172.72
2000	180	2	4	360	176.00
2001	178	3	9	534	179.29
N = 7	$\Sigma Y = 1186$	$\Sigma X = 0$	$\Sigma X^2 = 28$	$\Sigma XY = 92$	$\Sigma Y_t = 1186.01$

$a = \frac{\sum Y}{N} = \frac{1186}{7} = 169.429$ $\qquad b = \frac{\sum XY}{\sum X^2} = \frac{92}{28} = 3.286$

$Y = a + bX$

(i.e) $Y = 169.429 + 3.286X$ (or)

$Y = 169.429 + 3.286(x - 1998)$

$x = 1995, Y_t = 169.429 + 3.286(1995 - 1998)$

$= 169.429 + 3.286(-3) = 169.429 - 9.858 = 159.57$

$x = 1996, Y_t = 169.429 + 3.286(1996 - 1998)$

$= 169.429 + 3.286(-2) = 169.429 - 6.572 = 162.86$

$x = 1997, Y_t = 169.429 + 3.286(1997 - 1998)$

$= 169.429 + 3.286(-1) = 169.429 - 3.286 = 166.14$

$x = 1998, Y_t =- 169.429 + 3.286(1998 - 1998)$

$= 169.429 + 3.286(0) = 169.429 - 0 = 169.43$

$x = 1999, Y_t = 169.429 + 3.286(1999 - 1998)$

$= 169.429 + 3.286(1) = 169.429 + 3.286 = 172{:}72$

$x = 2000, Y_t = 169.429 + 3.286(2000 - 1998)$

$= 169.429 + 3.286(2) = 169.429 + 6.572 = 176.00$

$x = 2001, Y_t = 169.429 + 3.286(2001 - 1998)$

$= 169.429 + 3.286(3) = 169.429 + 9.858 = 179.29$

<u>கேள்வி18.</u> கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்கு பொருத்தமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைத் தீர்மானிக்க. மேலும், 2000-இலிருந்து 2004 வரை உள்ள எல்லா ஆண்டுகளுக்கும் போக்கு மதிப்பை கணக்கிடுக.

வருடம்	2000	2001	2002	2003	2004
விற்பனை (₹'000)	35	36	79	80	40

தீர்வு:

மீச்சிறு வர்க்க முறையில் நேர்க்கோட்டுப் போக்கு

வருடம் (x)	விற்பனை (Σ'000) Y	X= X -2002	X^2	XY	போக்கு மதிப்புகள் $(\hat{Y})$
2000	35	-2	4	-70	43.2
2001	36	-1	1	-36	48.6
2002	79	0	0	0	54
2003	80	1	1	80	59.4
2004	40	2	4	80	64.8
	$\Sigma Y = 270$	$\Sigma X = 0$	$\Sigma X^2 = 10$	$\Sigma XY = 54$	$\Sigma \hat{Y} = 270$

$\mathbf{a = \frac{\sum Y}{N} = \frac{270}{5} = 54 \; b = \frac{\sum XY}{\sum X^2} = \frac{54}{10} = 5.4}$

$Y = a + bX$

(i.e) $Y = 54 + 5.4X$

(or) $Y = 54 + 5.4(x - 2002)$

$x = 2000, \; y = 54 + 5.4(2000 - 2002) = 54 - 10.8 = 43.2$

$x = 2001, \; y = 54 + 5.4(2001 - 2002) = 54 - 5.4 = 48.6$

$x = 2002, \; y = 54 + 5.4(2002 - 2002) = 54$

$x = 2003, \; y = 54 + 5.4(2003 - 2002) = 54 + 5.4 = 59.4$

$x = 2004, \; y = 54 + 5.4(2004 - 2002) = 54 + 10.8 = 64.8$

கேள்வி19.

ஒரு பொருளின் விலை(டன்னில்) ஜனவரி 2010 முதல் டிசம்பர் 2010 வரை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. புள்ளி விவரங்களுக்குப் பகுதி சராசரி முறையில் போக்குக் கோட்டைப் பொருத்துக:

2010 ஆம் ஆண்டில்	ஜன	பிப்	மார்ச்	ஏப்	மே	ஜுன்
விற்பனை (டன்)	280	240	270	300	280	290
2010 ஆம் ஆண்டில்	ஜூலை	ஆகஸ்	செப்	அக்	நவம்	டிசம்
விற்பனை (டன்)	210	200	230	200	230	210

தீர்வு:

மாதங்களின் எண்ணிக்கை சமமாக (12) இருப்பதால், கொடுக்கப்பட்ட தரவை இரண்டு சம பாகங்களாகப் பிரித்து முதல் ஆறு மாதங்கள் மற்றும் கடைசி ஆறு மாதங்களின் சராசரியைப் பெறலாம்.

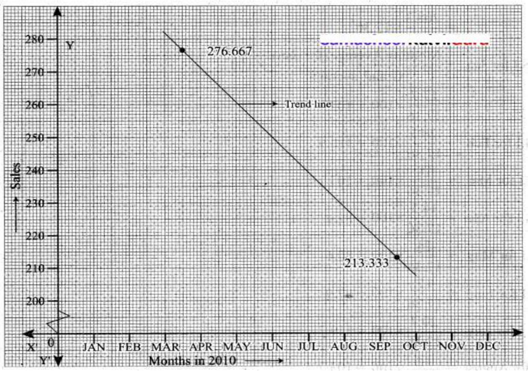
2010 ஆம் ஆண்டில்	விற்பனை(டன்)	சராசரி
ஜன	280	$\frac{280+240+270+300+280+290}{6} = 276.667$
பிப்	240	
மார்ச்	270	
ஏப்	300	
மே	280	
ஜுன்	290	
ஜுலை	210	$\frac{210+200+230+200+230+210}{6} = 213.333$
ஆகஸ்	200	
செப்	230	
அக்	200	
நவம்	230	
டிசம்	210	

அரை-சராசரி I=276.667 மற்றும்

அரை-சராசரி II=213.333 ஐப் பெறுகிறோம்

ஒரு போக்குக் கோட்டைப் பொருத்துவதற்கு, ஒவ்வொரு பாதியின் நடுப் புள்ளியில் (மாதம்) ஒவ்வொரு மதிப்பையும் திட்டமிடுகிறோம், (அதாவது) மார்ச் மற்றும் ஏப்ரல் நடுப்பகுதியில் 276.667.

செப்டம்பர் மற்றும் அக்டோபர் நடுப்பகுதியில் 213.333 இரண்டு புள்ளிகளையும் ஒரு நேர் கோட்டில் இணைக்கவும்.



கேள்வி20.

மாதாந்திர சராசரி முறையில் 2002, 2003 மற்றும் 2004 ஆண்டுகளுக்கான கீழ்க்காணும் பொருள்களின் உற்பத்தி புள்ளி விவரங்களுக்கு மாதாந்திர குறியீடுகளை காண்க.

2002	15	18	17	19	16	20	21	18	17	15	14	18
2003	20	18	16	13	12	15	22	16	18	20	17	15
2004	18	25	21	11	14	16	19	20	17	16	18	20

தீர்வு:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
2002	**15**	**18**	**17**	**19**	**16**	**20**	**21**	**18**	**17**	**15**	**14**	**18**
2003	**20**	**18**	**16**	**13**	**12**	**15**	**22**	**16**	**18**	**20**	**17**	**15**
2004	**18**	**25**	**21**	**11**	**14**	**16**	**19**	**20**	**17**	**16**	**18**	**20**
மாதாந்திர கூடுதல்	**53**	**61**	**54**	**43**	**42**	**51**	**62**	**54**	**52**	**51**	**49**	**53**
மாதாந்திர சராசரி	**17.7**	**20.3**	**18**	**14.3**	**14**	**17**	**20.7**	**18**	**17.3**	**17**	**16.3**	**17.7**
பருவகால குறியீடுகள்	**102**	**116.9**	**103.7**	**82.4**	**80.6**	**97.9**	**119.2**	**103.7**	**99.7**	**97.9**	**93.9**	**102**

சராசரிகளின் சராசரி

$= \frac{\mathbf{17.7+20.3+18+14.3+14+17+20.7+18+17.3+17+16.3+17.7}}{\mathbf{12}}$

$= \frac{\mathbf{208.3}}{\mathbf{12}} = \mathbf{17.36}$

ஜனவரி மாதத்திற்கான பருவகால குறியீடு

$= \frac{\textbf{சராசரி (ஜனவரிக்கு)}}{\text{சராசரிகளின் சராசரி}} \times \mathbf{100} = \frac{\mathbf{17.7}}{\mathbf{17.36}} \times \mathbf{100} = \mathbf{102}$

பிப் -கான பருவகால குறியீடு= $\frac{20.3}{17.36} \times 100 = 116.9$

மார்ச் -கான பருவகால குறியீடு= $\frac{18}{17.36} \times 100 = 103.7$

ஏப் - கான பருவகால குறியீடு= $\frac{14.3}{17.36} \times 100 = 82.4$

மே -கான பருவகால குறியீடு= $\frac{14}{17.36} \times 100 = 80.6$

ஜுன் -கான பருவகால குறியீடு= $\frac{17}{17.36} \times 100 = 97.9$

ஜுலை -கான பருவகால குறியீடு= $\frac{20.7}{17.36} \times 100 = 119.2$

ஆகஸ் -கான பருவகால குறியீடு= $\frac{18}{17.36} \times 100 = 103.7$

செப் -கான பருவகால குறியீடு= $\frac{17.3}{17.36} \times 100 = 99.7$

அக் -கான பருவகால குறியீடு= $\frac{17}{17.36} \times 100 = 97.9$

நவம் கான பருவகால குறியீடு= $\frac{16.3}{17.36} \times 100 = 93.9$

டிசம் -கான பருவகால குறியீடு= $\frac{17.7}{17.36} \times 100 = 102$

கேள்வி21.

எளிய சராசரி முறையின் மூலம் கீழ்க்கண்ட புள்ளி விவரங்களுக்கு பருவகால குறியீடுகளைக் காண்க:

வருடம்	காலாண்டு உற்பத்தி			
	I	II	III	IV
2008	72	68	62	76
2009	78	74	78	72
2010	74	70	72	76
2011	76	74	74	72
2012	72	72	76	68

தீர்வு:

வருடம்	I காலாண்டு	II காலாண்டு	III காலாண்டு	IV காலாண்டு
2008	72	68	62	76
2009	78	74	78	72
2010	74	70	72	76
2011	76	74	74	72
2012	72	72	76	68
காலாண்டு கூடுதல்	372	358	362	364
காலாண்டு சராசரி	74.4	71.6	72.4	72.8
குறியீடுகள்	102.2	98.35	99.45	100

சராசரிகளின் சராசரி $= \frac{74.4+71.6+72.4+72.8}{4} = \frac{291.2}{4} = 72.8$

1வது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு

$= \frac{\text{1 வது காலாண்டின் சராசரி}}{\text{சராசரிகளின் சராசரி}} \times 100 = \frac{74.4}{72.8} \times 100 = 102.2$

2வது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு

$= \frac{71.6}{72.8} \times 100 = 98.35$

3வது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு

$= \frac{72.4}{72.8} \times 100 = 99.45$

4வது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு

$= \frac{72.8}{72.8} \times 100 = 100$

கேள்வி22.

ஒரு குறிப்பிட்ட நிறுவனத்தில் பணிப்புரியும் விற்பனையாளர்களின் எண்ணிக்கை கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஆண்டு	1992	1993	1994	1995	1996
விற்பனையாளர்களின் எண்ணிக்கை	46	48	42	56	52

இப்புள்ளி விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்கமுறையில் ஒரு நேர்க்கோட்டைப் பொருத்துக மேலும் 1997 ஆம் ஆண்டில் விற்பனையாளர்களின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

ஆண்டு (x)	விற்பனையாளர்களின் எண்ணிக்கை (y)	$X = x - 1994$	X^2	XY	போக்கு மதிப்புகள் Y
1992	46	−2	4	−92	44.8
1993	48	−1	1	−48	46.8
1994	42	0	0	0	48.8
1995	56	1	1	56	50.8
1996	52	2	4	104	52.8
$N = 5$	$\sum Y = 244$	$\sum X = 0$	$\sum X^2 = 10$	$\sum XY = 20$	$\sum \hat{Y} = 244$

$a = \frac{\sum Y}{N} = \frac{244}{5} = 48.8 \quad b = \frac{\sum XY}{\sum X^2} = \frac{20}{10} = 2$

$Y = a + bX$

$Y = 48.8 + 2X = 48.8 + 2(x - 1994)$

போக்கு மதிப்புகள் பின்வருமாறு பெறப்படுகின்றன:

$x = 1992, y = 48.8 + 2(1992 - 1994) = 48.8 - 4 = 44.8$

$x = 1993, y = 48.8 + 2(1993 - 1994) = 48.8 - 2 = 46.8$

$x = 1994, y = 48.8 + 2(1994 - 1994) = 48.8 - 0 = 48.8$

$x = 1995, y = 48.8 + 2(1995 - 1994) = 48.8 + 2 = 50.8$

$x = 1996, y = 48.8 + 2(1996 - 1994) = 48.8 + 4 = 52.8$

1997 ஆம் ஆண்டில், மதிப்பிடப்பட்ட விற்பனையாளர்களின் எண்ணிக்கை

$\mathbf{Y = 48.8 + 2(1997 - 1994) = 48.8 + 2(3)}$

$\mathbf{= 48.8 + 6 = 54.6 \sim 55}$

கேள்வி15. 2005 ஆம் ஆண்டிற்கு (i) லாஸ்பியரின் முறை (ii) பாசியின் முறை மூலம் விலைக்குறியீட்டு எண்களைக் கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	1995		2005	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	5	60	15	70
B	4	20	8	35
C	3	15	6	20

தீர்வு:

பொருள்கள்	1995		2005		p_1q_0	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_1
	விலை (p_0)	அளவு (q_0)	விலை (p_1)	அளவு (q_1)				
A	5	60	15	70	900	300	350	1050
B	4	20	8	35	160	80	140	280
C	3	15	6	20	90	45	60	120
மொத்தம்						425	550	1150

லாஸ்பியரின் விலைக் குறியீடு எண்

$$P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100 = \frac{1150}{425} \times 100 = 270.6$$

பாசி இன் விலைக் குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{P} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100 = \frac{1450}{550} \times 100 = 263.$$

கேள்வி16.

2010 ஆம் ஆண்டிற்கு (i) லாஸ்பியர் (ii) பாசி (iii) ஃபிஷர் விலைக்குறியீட்டு எண்களை பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்குக் கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	விலை		அளவு	
	2000	2010	2000	2010
A	12	14	18	16
B	15	16	20	15
C	14	15	24	20
D	12	12	29	23

தீர்வு:

பொருள்கள்	2000		2010		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
	விலை (p_0)	அளவு (q_0)	விலை (p_1)	அளவு (q_1)				
A	12	18	14	16	252	216	224	192
B	15	20	16	15	320	300	240	225
C	14	24	15	20	360	336	300	280
D	12	29	12	23	348	348	276	276
					1280	1200	1040	973

லாஸ்பியரின் விலைக் குறியீடு எண்

$$P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100 = \frac{1280}{1200} \times 100 = 106.6$$

பாசி இன் விலைக் குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{P} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100 = \frac{1040}{973} \times 100 = 106.8$$

ஃபிஷர் விலைக்குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{F} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{1280}{1200} \times \frac{1040}{973}} \times 100$$

$$P_{01}^{F} = \sqrt{\frac{13,31,200}{11,67,600}} \times 100 = \sqrt{1.14} \times 100 = 106.7$$

கேள்வி17.

பின்வரும் விவரங்களுக்கு, ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்ணைக் கட்டமைக்கவும் மேலும் அது காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவறைறைப் பூர்த்தி செய்யும் என நிரூபிக்கவும்.

பொருள்கள்	யூனிட்ஒன்றுக்கு விலை(ரூ)		அலகுகளின் எண்ணிக்கை	
	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு
A	6	10	50	56
B	2	2	100	120
C	4	6	60	60
D	10	12	50	24
E	8	12	40	36

தீர்வு:

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
	விலை (p_0)	அளவு (q_0)	விலை (p_1)	அளவு (q_1)				
A	6	50	10	56	336	300	560	500
B	2	100	2	120	240	200	240	200
C	4	60	6	60	240	240	360	360
D	10	50	12	24	240	500	288	600
E	8	40	12	36	288	320	432	480
மொத்தம்					1344	1200	1880	2140

ஃபிஷர் விலைக்குறியீட்டு எண்= $\sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{2140}{1560} \times \frac{1880}{1344}} \times 100 = \sqrt{\frac{40,23,200}{20,96,640}} \times 100 = \sqrt{1.92} \times 100$$

$$= 1.385 \times 100 = 138.5 \qquad P_{01}^{F} = 138.5$$

காலமாற்றுச் சோதனை:நிரூபிக்க $P_{01} \times P_{10} = 1$

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 \times \sum p_0q_1}} \times \sqrt{\frac{\sum p_0q_1}{\sum p_1q_1} \times \frac{\sum p_0q_0}{\sum p_1q_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{2140}{1560} \times \frac{1880}{1344} \times \frac{1344}{1880} \times \frac{1560}{2140}} \qquad P_{01} \times P_{10} = 1$$

காலமாற்றுச் சோதனை பூர்த்தி செய்கிறது

காரணி சோதனை: நிரூபிக்க $P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 \times \sum p_0q_1}} \times \sqrt{\frac{\sum p_0q_1}{\sum p_1q_1} \times \frac{\sum p_0q_0}{\sum p_1q_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{2140}{1560} \times \frac{1880}{1344} \times \frac{1344}{1560} \times \frac{1880}{2140}} = \sqrt{\frac{1880 \times 1880}{1560 \times 1560}} = \frac{1880}{1560} = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$

காரணி சோதனை பூர்த்தி செய்கிறது

கேள்வி19.

பின்வரும் விவரங்களுக்கு, ஃபிஷர் விலை குறியீட்டு எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க. மேலும் அது கால மாற்றுச் சோதனையை பூர்த்தி செய்யும் என நிரூபிக்க.

பொருள்கள்	2016		2017	
	விலை(₹)	அளவு (கி.கி)	விலை(₹)	அளவு (கி.கி)
உணவு	40	12	65	14
எரிபொருள்	72	14	78	20
ஆடை	36	10	36	15
கோதுமை	20	6	42	4
மற்ற	46	8	52	6

தீர்வு:

பொருள்கள்	2016		2017		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
	(p_0)	(q_0)	(p_1)	(q_1)				
உணவு	40	12	65	14	780	480	910	560
எரிபொருள்	72	14	78	20	1092	1008	1560	1440
ஆடை	36	10	36	15	360	360	540	540
கோதுமை	20	6	42	4	252	120	168	80
மற்ற	46	8	52	6	416	368	312	276
					2900	2336	3490	2896

ஃபிஷர் விலைக்குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{F} = \sqrt{\frac{\Sigma\ p_1q_0}{\Sigma\ p_0q_0} \times \frac{\Sigma\ p_1q_1}{\Sigma\ p_0q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{2900}{2336} \times \frac{3490}{2896}} \times 100 = \sqrt{\frac{1,01,21,000}{67,65,056}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.496 \times 100} \ = 1.223 \times 100 = 122.3$$

$$P_{01}^{F} = 122.3$$

காலமாற்றுச் சோதனை: நிரூபிக்க $P_{01} \times P_{10} = 1$

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma\ p_1q_0 \times \Sigma\ p_1q_1}{\Sigma\ p_0q_0 \times \Sigma\ p_0q_1} \times \sqrt{\frac{\Sigma\ p_0q_1}{\Sigma\ p_1q_1} \times \frac{\Sigma\ p_0q_0}{\Sigma\ p_1q_0}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2900}{2336} \times \frac{3490}{2896} \times \frac{2896}{3490} \times \frac{2336}{2900}} = 1$$

காலமாற்றுச் சோதனை பூர்த்தி செய்கிறது

கேள்வி18.

பின்வரும் விவரங்களுக்கு, ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்ணைக் கட்டமைக்கவும் மேலும் அது காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவறைறைப் பூர்த்தி செய்யும் என நிரூபிக்கவும்.

ஆண்டு	கள் : A		கள் : B		கள் : B	
	விலை (₹)	அளவு (கி.கி)	விலை (₹)	அளவு (கி.கி)	விலை (₹)	அளவு (கி.கி)
1996	5	10	8	6	6	3
1999	4	12	7	7	5	4

தீர்வு:

கள்	1996		1999		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
	விலை (p_0)	அளவு (q_0)	விலை (p_1)	அளவு (q_1)				
A	5	10	4	12	40	50	48	60
B	8	6	7	7	42	48	49	56
C	6	3	5	4	15	18	20	24
மொத்தம்					97	116	117	140

ஃபிஷர் விலைக்குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{F} = \sqrt{\frac{\Sigma\ p_1q_0}{\Sigma\ p_0q_0} \times \frac{\Sigma\ p_1q_1}{\Sigma\ p_0q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{97}{116} \times \frac{117}{140}} \times 100 = \sqrt{\frac{1.1349}{16240}} \times 100 \ = 0.836 \times 100 = 83.6$$

கேள்வி14.

ஓர் இயந்திரம், கொடுக்கப்பட்ட எடையுடன் பாக்கெட்டுகளை வழங்க வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. 5 அளவு கொண்ட10 மாதிரிகளின் அளவீடுகள் பதிவு செய்யப்பட்டுக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள:

கூறு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{X}$	15	17	15	18	17	14	18	15	17	16
R	7	7	4	9	8	7	12	4	11	5

சராசரி மற்றும் வீச்சு கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டுபிடி. மேலும் கட்டுப்பாட்டின் நிலைகுறித்துக் கருத்து தருக.

(n = 5, A_2 = 0.58 , D_3 = 0 மற்றும் D_4 = 2.115)

தீர்வு:

கூறு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	மொத்தம்
$\bar{X}$	15	17	15	18	17	14	18	15	17	16	$\sum\bar{X} = 162$
R	7	7	4	9	8	7	12	4	11	5	$\sum R = 74$

$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{10} = \frac{162}{10} = 16.2$ & $\bar{R} = \frac{\sum R}{n} = \frac{74}{10} = 7.4$

<u>$\bar{X}$ வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்</u>

$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 16.2 + (0.58)(7.4) = 16.2 + 4.29 = 20.49$

$CL = 16.2$

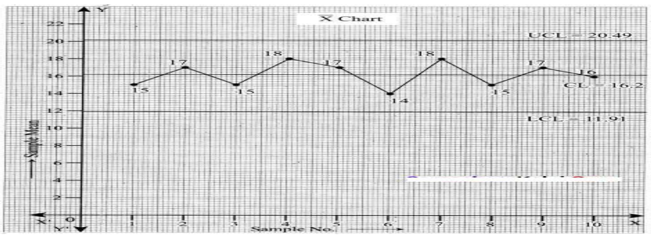
$LCL = \bar{X} - A_2\bar{R} = 16.2 - (0.58)(7.4) = 16.2 - 4.29 = 11.91$

<u>வீச்சு வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்</u>

$UCL = D_4\bar{R} = (2.115)(7.4) = 15.65$

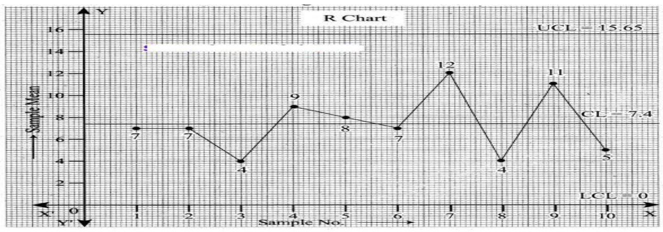
$CL = \bar{R} = 7.4$

$LCL = D_3\bar{R} = 0(7.4) = 0$



மாதிரி சராசரியின் அனைத்து புள்ளிகளும் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகளுக்குள் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

<u>வீச்சு</u>



வீச்சு மதிப்பின் அனைத்து புள்ளிகளும் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகளுக்குள் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

செயல்முறை கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது முடிவு செய்கிறோம்.

கேள்வி15.

உற்பத்தி செய்முறையிலிருந்து வழக்கமான இடைவெளியில் 5 அளவு கொண்ட 10 மாதிரிகளின் அளவீடுகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதன் மாதிரி சராசரி ($\bar{X}$) மற்றும் வீச்சு (R) ஆகியவை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

கூறு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{X}$	49	45	48	53	39	47	46	39	51	45
R	7	5	7	9	5	8	8	6	7	6

சராசரி கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டுபிடிக்க, மேலும் கட்டுப்பாட்டின் நிலை குறித்து கருத்து தருக.. (A_2 = 0.58 , D_3 = 0 மற்றும் D_4 = 2.115)

தீர்வு:

கூறு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	மொத்தம்
$\bar{X}$	49	45	48	53	39	47	46	39	51	45	462
R	7	5	7	9	5	8	8	6	7	6	68

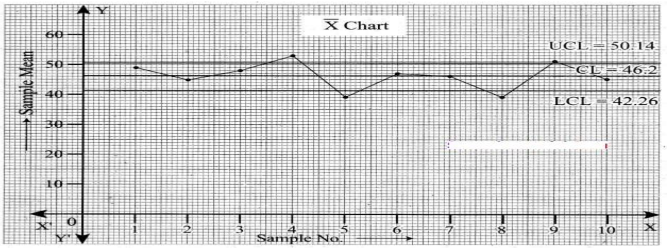
$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{10} = \frac{462}{10} = 46.2$ & $\bar{R} = \frac{\sum R}{10} = \frac{68}{10} = 6.8$

<u>$\bar{X}$ வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்</u>

$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 46.2 + (0.58)(6.8) = 46.2 + 3.944 = 50.14$

$CL = 46.2$

$LCL = \bar{X} - A_2\bar{R} = 46.2 - (0.58)(6.8) = 46.2 - 3.944 = 42.26$

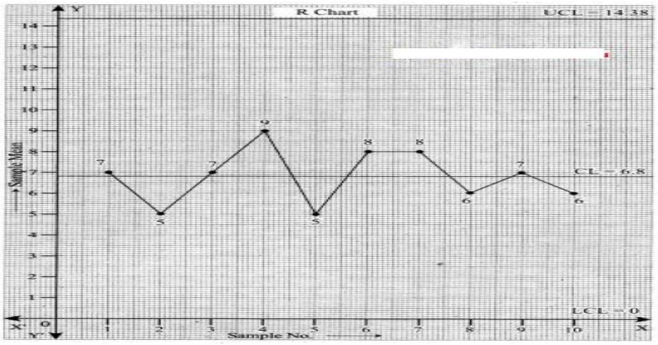


<u>வீச்சு வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்</u>

$UCL = D_4\bar{R} = (2.115)(6.8) = 14.38$

$CL = \bar{R} = 6.8$

$UCL = D_3\bar{R} = 0(6.8) = 0$



$\bar{X}$ விளக்கப்படத்திலிருந்து, 4 புள்ளிகள் கட்டுப்பாட்டு வரம்புக் கோடுகளுக்கு வெளியே இருப்பதைக் காண்கிறோம். அதனால் செயல்முறை கட்டுப்பாட்டை மீறுகிறது என்று கூறுகிறோம்

கேள்வி17.

சராசரி ($\bar{X}$) மற்றும் அதன் வீச்சு (R) க்கான மதிப்புகள் 5 அளவு கொண்ட 10 மாதிரிகளுக்கான அளவுகள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. சராசரி மற்றும் வீச்சுக் கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டுபிடி, மேலும் கட்டுப்பாட்டின் நிலைகுறித்து கருத்து தருக.

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சராசரி	11.2	11.8	10.8	11.6	11.0	9.6	10.4	9.6	10.6	10.0
வீச்சு	7	4	8	5	7	4	8	4	7	9

(n = 5, A_2 = 0.58 , D_3 = 0 மற்றும் D_4 = 2.115)

தீர்வு:

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	மொத்தம்
சராசரி	**11.2**	**11.8**	**10.8**	**11.6**	**11.0**	**9.6**	**10.4**	**9.6**	**10.6**	**10.0**	**106.6**
வீச்சு	**7**	**4**	**8**	**5**	**7**	**4**	**8**	**4**	**7**	**9**	**63**

$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{10} = \frac{106.6}{10} = 10.66$ $\quad \bar{R} = \frac{\sum R}{10} = \frac{63}{10} = 6.3$

$\bar{X}$ வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்

$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 10.66 + (0.58)(6.3) = 10.66 + 3.654 = 14.31$

$CL = \bar{\bar{X}} = 10.66$

$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 10.66 - (0.58)(6.3) = 10.66 + 3.654 = 7.006$

$7.006 < \bar{X} < 14.31$

செயல்முறை கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது

வீச்சு வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்

$UCL = D_4\bar{R} = (2.115)(6.3) = 13.32$

$CL = \bar{R} = 6.3$

$LCL = D_3\bar{R} = 0(6.3) = 0$

0< R < 13.32

செயல்முறை கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது

கேள்வி16.

பின்வரும் தரவிற்காக சராசரி $\bar{X}$ மற்றும் வீச்சு (R) கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டுபிடி.

மாதிரி எண்	கூறுகள்		
1	**32**	**36**	**42**
2	**28**	**32**	**40**
3	**39**	**52**	**28**
4	**50**	**42**	**31**
5	**42**	**45**	**34**
6	**50**	**29**	**21**
7	**44**	**52**	**35**
8	**22**	**35**	**44**

($n = 3$, $A_2 = 1.023, D_3 = 0$ மற்றும் $D_4 = 2.574$)

தீர்வு:

மாதிரி எண்	கூறுகள்			மொத்தம்	$\bar{X}$	R (H.V-L.V)
1	**32**	**36**	**42**	**110**	**36.67**	**10**
2	**28**	**32**	**40**	**100**	**33.33**	**12**
3	**39**	**52**	**28**	**119**	**39.67**	**24**
4	**50**	**42**	**31**	**123**	**41**	**19**
5	**42**	**45**	**34**	**121**	**40.33**	**11**
6	**50**	**29**	**21**	**100**	**33.33**	**29**
7	**44**	**52**	**35**	**131**	**43.67**	**17**
8	**22**	**35**	**44**	**101**	**33.67**	**22**
மொத்தம்					**301.67**	**144**

$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{8} = \frac{301.67}{8} = 37.71$

$\bar{R} = \frac{\sum R}{8} = \frac{144}{8} = 18$

$\bar{X}$ வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்

$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 37.71 + (1.023)(18) = 37.71 + 18.414 = 56.12$

$CL = \bar{\bar{X}} = 37.71$

$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 37.71 - (1.023)(18) = 37.71 - 18.414 = 19.296$

$19.296 < \bar{X} < 56.12$

செயல்முறை கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது

வீச்சு வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்

$UCL = D_4\bar{R} = (2.574)(18) = 46.33$

$CL = \bar{R} = 18$

$LCL = D_3\bar{R} = 0(18) = 0$

0< R < 46.33

செயல்முறை கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது

கேள்வி18.

ஒரு தரக்கட்டுப்பாட்டு ஆய்வாளர், ஓர் உருளைக் கிழங்கு சில்லுகள் (chips) தயாரிக்கும் நிறுவனத்தில் இருந்து நான்கு அளவு கொண்டபத்து மாதிரிப் பாக்கெட்டுகள் எடுத்துள்ளார். மாதிரி உள்ளடக்கங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி மற்றும் வீச்சு கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

மாதிரி எண்	கூறுகள்			
	1	2	3	4
1	12.5	12.3	12.6	12.7
2	12.8	12.4	12.4	12.8
3	12.1	12.6	12.5	12.4
4	12.2	12.6	12.5	12.3
5	12.4	12.5	12.5	12.5
6	12.3	12.4	12.6	12.6
7	12.6	12.7	12.5	12.8
8	12.4	12.3	12.6	12.5
9	12.6	12.5	12.3	12.6
10	12.1	12.7	12.5	12.8

(n = 5, A_2 = 0.58 , D_3 = 0 மற்றும் D_4 = 2.115)

தீர்வு:

மாதிரி எண்	கூறுகள்				மொத்தம்		
	1	2	3	4		$\bar{X}$	R
1	12.5	12.3	12.6	12.7	50.1	12.53	0.4
2	12.8	12.4	12.4	12.8	50.4	12.6	0.4
3	12.1	12.6	12.5	12.4	49.6	12.4	0.5
4	12.2	12.6	12.5	12.3	49.6	12.4	0.4
5	12.4	12.5	12.5	12.5	49.9	12.48	0.1
6	12.3	12.4	12.6	12.6	49.9	12.48	0.3
7	12.6	12.7	12.5	12.8	50.6	12.65	0.3
8	12.4	12.3	12.6	12.5	49.8	12.45	0.3
9	12.6	12.5	12.3	12.6	50	12.5	0.3
10	12.1	12.7	12.5	12.8	50.1	12.53	0.7
மொத்தம்						125.02	3.7

$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{10} = \frac{125.02}{10} = 12.5$ & $\bar{R} = \frac{\sum R}{10} = \frac{3.7}{10} = 0.37$

$\bar{X}$ வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்

$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 12.5 + (0.729)(0.37) = 12.5 + .27 = 12.77$

$CL = \bar{\bar{X}} = 12.5$

$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 12.5 - (0.729)(0.37) = 12.5 - .27 = 12.23$

$12.23 < \bar{X} < 12.77$ செயல்முறை கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது

வீச்சு வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்

$UCL = D_4\bar{R} = (2.282)(0.37) = 0.84$

$CL = \bar{R} = 0.37$

$LCL = D_3\bar{R} = (0)(0.37) = 0$

$0 < R < 0.84$ **செயல்முறை கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது**

கேள்வி19.

பின்வரும் தரவு, சராசரி ($\bar{X}$) மற்றும் அதன் வீச்சு (R) மதிப்புகள் 4 அளவு கொண்ட பத்து மாதிரியினைக் காட்டுகின்றன. சராசரி மற்றும் வீச்சுக் கட்டுப்பாட்டு விளக்கப்படம் ஒன்றை உருவாக்குக.

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{X}$	29	26	37	34	14	45	39	20	34	23
R	39	10	39	17	12	20	05	21	23	15

தீர்வு:

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	மொத்தம்
$\bar{X}$	29	26	37	34	14	45	39	20	34	23	301
R	39	10	39	17	12	20	05	21	23	15	201

$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{10} = \frac{301}{10} = 30.1$ & $\bar{R} = \frac{\sum R}{10} = \frac{201}{10} = 20.1$

$\bar{X}$ - வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்

$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 30.1 + (0.729)(20.1) = 44.75$

$CL = \bar{\bar{X}} = 30.1$

$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 30.1 - (0.729)(20.1) = 15.45$

வீச்சு வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்

$UCL = D_4\bar{R} = (2.282)(20.1) = 45.87$

$CL = \bar{R} = 20.1$

$LCL = D_3\bar{R} = (0)(20.1) = 0$

$\bar{X}$ - க்கான கட்டுப்பாட்டு வரம்புகளின் மதிப்புகளில் இருந்து, ஒரு மாதிரி $\bar{X}$ மதிப்பு (45) UCLக்கு மேலே இருப்பதையும், ஒரு மாதிரி மதிப்பு (14) LCL க்குக் கீழே இருப்பதையும் கவனிக்கிறோம். எனவே செயல்முறை கட்டுப்பாட்டில் இல்லை என்று முடிவு செய்கிறோம்

கேள்வி20.

ஓர் உற்பத்தி செயல் முறையில், 4 அளவு கொண்ட எட்டு மாதிரிகள் சேகரிக்கப்பட்டு, அதனுடைய சராசரி மற்றும் வீச்சு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி மற்றும் வீச்சுக் கட்டுப்பாட்டு விளக்கப் படத்துடன் கட்டுப்பாடு வரம்புகளையும் கண்டுபிடிக்க.

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{X}$	12	13	11	12	14	13	16	15
R	2	5	4	2	3	2	4	3

தீர்வு:

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	மொத்தம்
$\bar{X}$	12	13	11	12	14	13	16	15	106
R	2	5	4	2	3	2	4	3	25

$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{8} = \frac{106}{8} = 13.25$ & $\bar{R} = \frac{\sum R}{8} = \frac{25}{8} = 3.13$

$\bar{X}$ - வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்

$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 13.25 + (0.729)(3.13) = 15.53$

$CL = \bar{\bar{X}} = 13.25$

$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 13.25 - (0.729)(3.13) = 10.97$

வீச்சு வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்

$UCL = D_4\bar{R} = (2.282)(3.13) = 7.14$

$CL = \bar{R} = 3.13$

$LCL = D_3\bar{R} = (0)(3.13) = 0$

$\bar{X}$ - க்கான கட்டுப்பாட்டு வரம்புகளின் மதிப்புகளில் இருந்து, ஒரு மாதிரி $\bar{X}$ மதிப்பு (16) UCLக்கு மேலே இருப்பதையும் கவனிக்கிறோம். எனவே செயல்முறை கட்டுப்பாட்டில் இல்லை என்று முடிவு செய்கிறோம்

கேள்வி 21.

ஒரு குறிப்பிட்டகுவளை தயாரிக்கும் துறையில், தரகட்டுப்பாட்டு ஆய்வாளர் காலையில் ஒவ்வொரு மணி நேரத்திலும் சீரற்ற முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 5 குவளைகளின் ஒவ்வொரு எடையையும் பதிவு செய்தார்.

நேரம்	எடைகள் (ml)				
8:00 AM	43	41	42	43	41
9:00 AM	40	39	40	39	44
10:00 AM	42	42	43	38	40
11:00 AM	39	43	40	39	42

சராசரி மற்றும் வீச்சுக் கட்டுப்பாடு வரம்புகளை கண்டுபிடிக்க.

தீர்வு:

நேரம்	எடைகள் (ml)					$\bar{X}$	R
8.00AM	43	41	42	43	41	42	2
9.00AM	40	39	40	39	44	40.4	5
10.00AM	42	42	43	38	40	41	5
11.00AM	39	43	40	39	42	40.6	4
மொத்தம்						164	16

$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{4} = \frac{164}{4} = 41$ & $\bar{R} = \frac{\sum R}{4} = \frac{16}{4} = 4$

$\bar{X}$ - வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்

$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 41 + (0.58)(4) = 43.32$

$CL = \bar{\bar{X}} = 41$

$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 41 - (0.58)(4) = 38.68$

வீச்சு வரைபடத்தின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள்

$UCL = D_4\bar{R} = (2.115)(4) = 8.46$

$CL = \bar{R} = 4$

$LCL = D_3\bar{R} = (0)4 = 0$

செயல்முறை கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது என்று முடிவு செய்கிறோம்.

அத்தியாயம் - 10

செயல் முறைகள் ஆராய்ச்சி

(2, 3 மற்றும் 5 மதிப்பெண்கள்)

பயிற்சி 10.1

2 - மதிப்பெண்கள்

கேள்வி1.

போக்குவரத்து கணக்குகள் என்றால் என்ன?

விடை :

மொத்த போக்குவரத்து செலவை குறைக்கும் வகையில் ஒவ்வொரு ஆதியிலிருந்து ஒவ்வொரு சேரும் இடத்திற்கு அனுப்பக்கூடிய பொருள்களின் அளவை தீர்மானிப்பது போக்குவரத்து கணக்கு ஆகும்

கேள்வி2.

போக்குவரத்து கணக்கின் கணித வடிவத்தை எழுதுக.

விடை :

$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்குக் இணங்க குறிக்கோள் சார்பில் சிறுமம் காணுதல்

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,2, \ldots\ldots m$ (அளிப்பு கட்டுப்பாடுகள்)

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,2, \ldots\ldots n$ (தேவை கட்டுப்பாடுகள்)

$x_{ij} \geq 0, \ i, j.$ (குறை குறியற்ற நிபந்தனைகள்

கேள்வி3.

போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்வு மற்றும் சிதைவற்ற தீர்வு என்றால் என்ன?

விடை :

ஏற்புடையத் தீர்வு: கட்டுப்பாடுகளை பூர்த்தி செய்ய கூடிய குறை எண் அல்லாத $x_{ij}(i = 1,2, \ldots, m, j = 1,2, \ldots n)$ இன் மதிப்புகள் போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடைய தீர்வுகள் ஆகும்

சிதைவற்ற தீர்வு : சிதைவற்ற அடிப்படை தீர்வு என்பது போக்குவரத்துக்கு கணக்கின் ஏற்புடைய தீர்வில் சரியாக **m+n-1** ஒதுக்கீடுகள் ஒன்றை ஒன்று சாரா நிலையில் அமைந்தது ஆகும் இங்கு m. n என்பது முறையே நிரை மற்றும் நிரலை குறிக்கிறது

கேள்வி4.

சமநிலை போக்குவரத்து கணக்கு என்பதன் பொருள் யாது?

விடை :

மொத்த அளிப்புகள் = மொத்த தேவைகள் எனில் , கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்கு எனலாம் .

பயிற்சி 10.2

கேள்வி1.

ஒதுக்கீடு கணக்கு என்றால் என்ன?

விடை :

'm' வேலைகள் 'n' இயந்திரங்களில் செய்யப்பட வேண்டும் (ஒரு இயந்திரத்திற்கு ஒரு வேலை).

ஒட்டுமொத்த செலவைக் குறைப்பதற்காக வெவ்வேறு இயந்திரங்களுக்கு வெவ்வேறு வேலைகளை ஒதுக்குவது ஒதுக்கீட்டுச் கணக்கு எனப்படும்.

கேள்வி2.

ஒதுக்கீடு கணக்கின் கணித வடிவம் தருக.

விடை :

ஒதுக்கீடு கணக்கின் கணித வடிவம்

குறிக்கோள் சார்பு சிறுமம் : $Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}$

$x_{ij} = 0 \text{ (or) } 1$

$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{i – வது வேலையை j – இயந்திரத்திற்கு ஒதுக்கீடு செய்யவில்லை} \\ 1 & \text{i – வது வேலையை j – இயந்திரத்திற்கு ஒதுக்கீடு செய்தல்} \end{cases}$

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,3,...n$

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; \ i = 1,2,3,...n$

x_{ij} - i-வது வேலையை j-இயந்திரத்திற்கு ஒதுக்கீடு செய்தல்

C_{ij} - i-வது வேலையை j-இயந்திரத்திற்கு ஒதுக்கீடு செய்வதால ஆகும் செலவு

கேள்வி3.

ஒதுக்கீடு கணக்கிற்கும் , போக்குவரத்து கணக்கிற்கும் இடையேயான வேறுபாடு என்ன?

விடை :

ஒதுக்கீட்டுச்கணக்கு என்பது போக்குவரத்துச் கணக்கின் ஒரு சிறப்புவகை ஆகும்

ஒதுக்கீடு கணக்கு	போக்குவரத்து கணக்கு
1. இது வணிக பொருட்களின் போக்குவரத்து சார்ந்தது	குறைந்த செலவில் வரையறுக்கப்பட்ட பொருட்களை வரையறுக்கப்பட்ட இடத்திற்கு ஒதுக்குவது
2. தேவைகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் அளிப்புகளின் எண்ணிக்கை சமமாக இருக்க அவசியம் இல்லை	2.ஆதார இடங்களின் எணிக்கையும் சேரும் இடங்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்க வேண்டும்
3. மொத்த அளிப்பு மற்றும் மொத்த தேவையும் சமமற்று இருந்தால் சமநிலை அற்ற போக்குவரத்துக்கு கணக்கு ஆகும்	3.நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் சமமற்று இருந்தால் சம நிலை அற்ற ஒதுக்கீடு கணக்காகும்
4. ஒவ்வொரு நிறை மற்றும் நிரலில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ஒதுக்கீடுகளை செய்யலாம்	4. இதில் ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலில் ஒரே ஒரு ஒதுக்கீடு மட்டுமே செய்ய வேண்டும்

3 - மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 10.1

கேள்வி5 .

வடமேற்கு மூலை முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	அளிப்பு
O_1	5	3	6	2	19
O_2	4	7	9	1	37
O_3	3	4	7	5	34
தேவை	16	18	31	25	

தீர்வு:

போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_1	D_2	D_3	D_4	அளிப்பு a_i
O_1	5	3	6	2	19
O_2	4	7	9	1	37
O_3	3	4	7	5	34
தேவை (b_j)	16	18	31	25	90

மொத்த அளிப்பு = மொத்த தேவை = 90.

முதல் ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(16) 5	3	6	2	~~19~~ 3
O_2	4	7	9	1	37
O_3	3	4	7	5	34
(b_j)	~~16~~ 0	18	31	25	90

இரண்டாவது ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(16) 5	(3) 3	6	2	~~19/3~~/0
O_2	4 -	7	9	1	37
O_3	3 -	4	7	5	34
(b_j)	~~16~~ 0	~~18~~/15	31	25	90

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு::

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(16) 5	(3) 3	6	2	19/3/0
O_2	4	(15) 7	9	1	37/22
O_3	3	4 -	7	5	34
(b_j)	16/0	18/15/0	31	25	90

நான்காவது ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(16) 5	(3) 3	6	2	19/3/0
O_2	4	(15) 7	(22) 9	1	37/22/0
O_3	3	4	7	5	34
(b_j)	16/0	18/15/0	31/9	25	90

ஐந்தாவது ஒதுக்கீடு :

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(16) 5	(3) 3	6	2	19/3/0
O_2	4	(15) 7	(22) 9	1	37/22/0
O_3	3	4	(9) 7	5	34/25
(b_j)	16/0	18/15/0	31/9/0	25	35

இறுதி ஒதுக்கீடு :

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(16) 5	(3) 3	6	2	19/3/0
O_2	4	(15) 7	(22) 9	1	37/22/0
O_3	3	4	(9) 7	(25) 5	34/25/0
(b_j)	16/0	18/15/0	31/9/0	25/0	35

போக்குவரத்து அட்டவணை::

$O_1 \to D_1, O_1 \to D_2, O_2 \to D_2, O_2 \to D_3, O_3 \to D_3, O_3 \to D_4$

$x_{11} = 16, x_{12} = 3, x_{22} = 15, x_{23} = 22, x_{33} = 9, x_{34} = 25.$

மொத்தம் போக்குவரத்து செலவு

$= (16 \times 5) + (3 \times 3) + (15 \times 7) + (22 \times 9) + (9 \times 7) + (25 \times 5)$

$= 80 + 9 + 105 + 198 + 63 + 125$

$= 580$

கேள்வி6.

வடமேற்கு மூலை முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

	பெங்களூரு	நாசிக்	போபால்	டில்லி	இருப்பு
சென்னை	**6**	**8**	**8**	**5**	**30**
மதுரை	**5**	**11**	**9**	**7**	**40**
திருச்சி	**8**	**9**	**7**	**13**	**50**
	35	**28**	**32**	**25**	

தீர்வு:

மொத்தம் கொள்ளளவு = மொத்தம் தேவை = 120.

முதல் ஒதுக்கீடு:

	B	N	Bh	D	(a_i)
C	(30) 6	8	8	5	30/0
M	5	11	9	7	40
T	8	9	7	13	50
(b_j)	35/5	28	32	25	120

இரண்டாவது ஒதுக்கீடு:

	B	N	Bh	D	(a_i)
C	(30) 6	8	8	5	30/0
M	(5) 5	11	9	7	40/35
T	8	9	7	13	50
(b_j)	35/5/0	28	32	25	120

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு: :

	B	N	Bh	D	(a_i)
C	(30) 6	8	8	5	30/0
M	(5) 5	(28) 11	9	7	40/35/7
T	8	9	7	13	50
(b_j)	35/5/0	28/0	32	25	120

நான்காவது ஒதுக்கீடு :

	B	N	Bh	D	(a_i)
C	(30) 6	8	8	5	30/0
M	(5) 5	(28) 11	(7) 9	7	40/35/7
T	8	9	7	13	50
(b_j)	35/5/0	28/0	32/25	25	120

ஐந்தாவது ஒதுக்கீடு :

	B	N	Bh	D	(a_i)
C	(30) 6	8	8	5	30/0
M	(5) 5	(28) 11	(7) 9	7	40/35/7
T	8	9	(25) 7	13	50/25
(b_j)	35/5/0	28/0	32/25/0	25	120

இறுதி ஒதுக்கீடு :

	B	N	Bh	D	(a_i)
C	(30) 6	8	8	5	30/0
M	(5) 5	(28) 11	(7) 9	7	40/35/7
T	8	9	(25) 7	(25) 13	50/25/0
(b_j)	35/5/0	28/0	32/25/0	25/0	120

போக்குவரத்து அட்டவணை: (i.e) $x_{11} = 30, x_{21} = 5, x_{22} = 28, x_{23} = 7, x_{33} = 25, x_{34} = 25$

மொத்த போக்குவரத்து செலவு

$= (30 \times 6) + (5 \times 5) + (28 \times 11) + (7 \times 9) + (25 \times 7) + (25 \times 13)$

$= 180 + 25 + 308 + 63 + 175 + 325$

$= 1076$

இதனால் குறைந்தபட்ச செலவு ரூ. 1076 வட மேற்கு கமர் முறை மூலம்.

கேள்வி7.

மீச்சிறு செலவு முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படைத் தீர்வைக் காண்க

	D_1	D_2	D_3	**அளிப்பு**
O_1	**9**	**8**	**5**	**25**
O_2	**6**	**8**	**4**	**35**
O_3	**7**	**6**	**9**	**40**
தேவை	**30**	**25**	**45**	

தீர்வு: மொத்தம் அளிப்பு = மொத்தம் தேவை = 100

முதல் ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	9	8	5	25
O_2	6	8	(35) 4	35/0
O_3	7	6	9	40
(b_j)	30	25	45/10	

இரண்டாவது ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	9	8	(10) 5	25/15
O_2	6	8	(35) 4	35/0
O_3	7	6	9	40
(b_j)	30	25	45/10/0	

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு::

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	9	8	(10) 5	25/15
O_2	6	8	(35) 4	35/0
O_3	7	(25) 6	9	40
(b_j)	30	25/0	45/10/0	

நான்காவது ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	9	8	(10) 5	25/15
O_2	6	8	(35) 4	35/0
O_3	(15) 7	(25) 6	9	40/15/0
(b_j)	30/15	25/0	45/10/0	

இறுதி ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	(15) 9	8	(10) 5	25/15/0
O_2	6	8	(35) 4	35/0
O_3	(15) 7	(25) 6	9	40/15/0
(b_j)	30/15/0	25/0	45/10/0	

போக்குவரத்து அட்டவணை:$O_1 \rightarrow D_1, O_1 \rightarrow D_3, O_2 \rightarrow D_3, O_3 \rightarrow D_1, O_3 \rightarrow D_2$

(i.e) $x_{11} = 15, x_{13} = 10, x_{23} = 35, x_{31} = 15, x_{32} = 25$

மொத்தம் செலவு =(15×9)+(10×5)+(35×4)+(15×7)+(25×6)

$= 135 + 50 + 140 + 105 + 150$

$= 580$

எனவே குறைந்த செலவில் (LCM) செலவு ரூ. 580

கேள்வி10.

வடமேற்கு மூலை முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

		தொட்டி					அளிப்பு
		A	**B**	**C**	**D**	**E**	
	P	**2**	**11**	**10**	**3**	**7**	**4**
ஆதி	**Q**	**1**	**4**	**7**	**2**	**1**	**8**
	R	**3**	**9**	**4**	**8**	**12**	**9**
தேவை		**3**	**3**	**4**	**5**	**6**	

தீர்வு:

மொத்தம் தேவை = மொத்தம் அளிப்பு = 21

முதல் ஒதுக்கீடு:

	A	B	C	D	E	a_i
P	**(3) 2**	11	10	3	7	4/1
Q	1	4	7	2	1	8
R	3	9	4	8	12	9
b_j	3/0	3	4	5	6	

இரண்டாவது ஒதுக்கீடு:

	B	C	D	E	a_i
P	**(1) 11**	10	3	7	1/0
Q	4	7	2	1	8
R	9	4	8	12	9
b_j	3/2	4	5	6	

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு: :

	B	C	D	E	a_i
Q	**(2) 4**	7	2	1	8/6
R	9	4	8	12	9
b_j	2/0	4	5	6	

நான்காவது ஒதுக்கீடு :

	C	D	E	a_i
Q	**(4) 7**	2	1	6/2
R	4	8	12	9
b_j	4/0	5	6	

ஐந்தாவது ஒதுக்கீடு :

	D	E	a_i
Q	(2) 2	1	2/0
R	8	12	9
b_j	5/3	6	

இறுதி ஒதுக்கீடு :

	D	E	a_i
R	(3) 8	(6) 12	9/6/0
b_j	3/0	6/0	

	A	B	C	D	E	a_i
P	(3) 2	(1) 11	10	3	7	4
Q	1	(2) 4	(4) 7	(2) 2	1	8
R	3	9	4	(3) 8	(6) 12	9
b_j	3	3	4	5	6	

போக்குவரத்து அட்டவணை:

$\mathbf{P \rightarrow A, P \rightarrow B, Q \rightarrow B, Q \rightarrow C, Q \rightarrow D, R \rightarrow D, R \rightarrow E}$

$\mathbf{(i.e) x_{11} = 3, x_{12} = 1, x_{22} = 2, x_{23} = 4, x_{24} = 2, x_{34} = 3, x_{35} = 6}$

மொத்தம் செலவு =(3×2)+(1×11)+(2×4)+(4×7)+(2×2)+(3×8)+(6×12) $= 6 + 11 + 8 + 28 + 4 + 24 + 72 = 153$

கேள்வி12.

வடமேற்கு மூலை முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

	D	E	F	G	அளிப்பு
A	11	13	17	14	250
B	16	18	14	10	300
C	21	24	13	10	400
தேவை	200	225	275	250	

தீர்வு:

மொத்தம் கிடைக்கும் தன்மை = மொத்தம் தேவை= 950

முதல் ஒதுக்கீடு:

	D	E	F	G	a_i
A	(200) 11	13	17	14	250/5
B	16	18	14	10	300
C	21	24	13	10	400
b_j	200/0	225	275	250	

இரண்டாவது ஒதுக்கீடு :

	E	F	G	a_i
A	(50) 13	17	14	50/0
B	18	14	10	300
C	24	13	10	400
b_j	225/175	275	250	

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு: :

	E	F	G	a_i
B	(175) 18	14	10	300/125
C	24	13	10	400
b_j	175/0	275	250	

நான்காவது ஒதுக்கீடு:

	F	G	a_i
B	(125) 14	10	125/0
C	13	10	400
b_j	275/150	250	

ஐந்தாவது ஒதுக்கீடு :

	F	G	a_i
C	(150) 13	(250) 10	400/250/0
b_j	150/0	250/0	

	D	E	F	G	
A	(200) 11	(50) 13	17	14	250
B	16	(175) 18	(125) 14	10	300
C	21	24	(150) 13	(250) 10	400
	200	225	275	250	

போக்குவரத்து அட்டவணை:: $A \to D, A \to E, B \to E, B \to F, C \to F, C \to G$

(i.e) $x_{11} = 200, x_{12} = 50, x_{22} = 175, x_{23} = 125, x_{33} = 150, x_{34} = 250$

செலவு =(200×11)+(50×13)+(175×18)+(125×14)+(150×13)+(250×10)

$= 2200 + 650 + 3150 + 1750 + 1950 + 2500 =$ **Rs. 12, 200**

பயிற்சி 10.2

கேள்வி4.

A,B,C மூன்று வேலைகள் U,V, W என்ற இயந்திரங்களுக்கு ஒதுக்கீடு செய்யப்பட வேண்டும். ஒவ்வொரு இயந்திரமும் ஒவ்வொரு வேலையை முடிக்க ஆகும் செலவு அணியானது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மொத்த செலவை குறைக்குமாறு உகந்த ஒதுக்கீடுகளை காண்க.

இயந்திரம்

		U	V	W
வேலை	**A**	**17**	**25**	**31**
	B	**10**	**25**	**16**
	C	**12**	**14**	**11**

(ஒரு அலகுக்கான செலவு ₹-ல்)

தீர்வு: இங்கே நிரல் மற்றும் நிரைகளின் எண்ணிக்கை சமம்

படி 1: ஒவ்வொரு நிரைகளிலும் சிறிய உறுப்பைத் தேர்ந்தெடுத்து அதே நிரையில் உள்ள மற்ற உறுப்புகளிலிருந்து கழிப்போம்.

	U	V	W
A	0	8	14
B	0	15	6
C	1	3	0

நிரல் V இல் பூஜ்ஜியம் இல்லை. படி 2 க்குச் செல்லவும்.

படி 2: நிரல் V இல் சிறிய உறுப்பைத் தேர்ந்தெடுத்து அதே நிரல் உள்ள மற்ற உறுப்புகளிலிருந்து கழிக்கவும்.

	U	V	W
A	0	5	14
B	0	12	6
C	1	0	0

ஒவ்வொரு நிரல் மற்றும் நிரையில் குறைந்தது ஒரு பூஜ்ஜியத்தைக் கொண்டிருப்பதால், நாம் ஒதுக்கீடு செய்ய ஆரம்பிக்கலாம்

.படி 3: (ஒதுக்கீடு) : A நிரையில் சரியாக ஒரு பூஜ்ஜியத்தைக் கொண்டுள்ளது. அதை □ மற்றும் அதன் நிரலில் உள்ள மற்ற பூஜ்ஜியங்களை x ஆல் குறிக்கவும்.

	U	V	W
A	[0]	5	14
B	0 (x)	12	6
C	1	0	0

இப்போது நிரல் வாரியாக தொடரவும். நிரல் V சரியாக ஒரு பூஜ்ஜியத்தைக் கொண்டுள்ளது. □ மற்றும் அதன் வரிசையில் உள்ள மற்ற பூஜ்ஜியங்களை X ஆல் குறிக்கவும்.

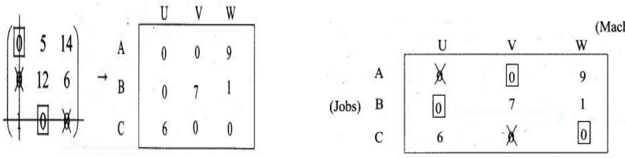
படி 4:

	U	V	W
A	[0]	5	14
B	0 (x)	12	6
C	1	[0]	0 (x)

இப்போது வேலையை ஒதுக்குவதற்கு B வரிசையில் பூஜ்ஜியம் இல்லை. அதனால் பின்வருமாறு தொடரவும். குறைக்கப்பட்ட அணியில் உள்ள அனைத்து

பூஜ்ஜியங்களையும் மறைக்க குறைந்தபட்ச எண்ணிக்கையிலான கோடுகளை வரையவும். அனைத்து வெளிப்படுத்தப்பட்ட உறுப்புகளிலிருந்து 5 ஐக் கழித்து, கீழே காட்டப்பட்டுள்ளபடி 2 வரிகளின் குறுக்குவெட்டில் உள்ள உறுப்புடன் சேர்க்கவும்.

படி 5:



இப்போது பின்வரும் அணியை பெற முழு செயல்முறையையும் மீண்டும் ஒருமுறை தொடங்கவும். இதனால் 3 பணிகளும் செய்யப்பட்டுள்ளன. உகந்த பணி அட்டவணை மற்றும் மொத்த செலவு வேலை இயந்திர செலவு ஆகும்

வேலை	இயந்திர	செலவு
A	V	25
B	U	10
C	W	11
மொத்தம்		46

<u>பயிற்சி 10.3</u>

<u>கேள்வி1.</u>

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக்கான உகந்த வியூகத்தை (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மற்றும் (ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு ஆகியவற்றை பயன்படுத்தி காண்க.

வியூகம்	சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடுகள்	
	E_1	E_2
S_1	**40**	**60**
S_2	**10**	**-20**
S_3	**-40**	**150**

தீர்வு:

வியூகம்	சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடுகள்		குறைந்த பட்சம்	அதிக பட்சம்
	E_1	E_2		
S_1	40	60	40	60
S_2	10	-20	-20	10
S_3	-40	150	-40	150

(i) **மீச்சிறுவின் மீப்பெரு**:

அதிகபட்சம் $(40, -20, -40) = 40$. அதிகபட்ச விதியின்படி S_1 சிறந்த உத்தி.

(ii) **மீப்பெருவின் மீச்சிறு**:

குறைந்தபட்சம் (60,10,150)=10. குறைந்தபட்ச ஊதியம் ரூ. 10 , மினிமேக்ஸ் விதியின்படி S_2 சிறந்த உத்தி.

<u>கேள்வி2.</u>

ஒரு விவசாயி தனது 100 ஏக்கர் பண்ணையில் மூன்று வகையான பயிர்களைப் பயிரிடத் திட்டமிட்டுள்ளார்.இலாபமானது மழை மற்றும் பருவநிலையைப் சார்ந்திருக்கும். அந்த விவசாயி மழை அளவை அதிகம், சராசரி மற்றும் குறைவு என மூன்று வகையாக வகைப்படுத்துகிறார். ஒவ்வொரு வகையான பயிரிலும் அவர் எதிர்பார்க்கும் இலாபம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மழையளவு	மதிப்பிடப்பட்ட விற்பனை (அலகுகளில்)		
	பயிர் A	பயிர் B	பயிர் C
அதிகம்	8000	3500	5000
சராசரி	4500	4500	5000
குறைவு	2000	5000	4000

எந்த வகையான பயிரை அவர் பயிரிடுவார் என்பதை முடிவு செய்ய (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மற்றும் (ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு ஆகியவற்றை பயன்படுத்தி காண்க.

தீர்வு:

மழையளவு	மதிப்பிடப்பட்ட விற்பனை (அலகுகளில்)			குறைந்த பட்சம்	அதிக பட்சம்
	பயிர் A	பயிர் B	பயிர் C		
அதிகம்	8000	4500	2000	2000	8000
சராசரி	3500	4500	5000	5000	5000
குறைவு	5000	5000	4000	4000	5000

மீச்சிறுவின் மீப்பெரு

அதிகபட்சம் (2000,3500,4000)=4000.

அவர் பயிர் C ஐ சிறந்த பயிராக தேர்வு செய்யவேண்டும்.

மீப்பெருவின் மீச்சிறு

குறைந்தபட்சம் (8000,5000,5000)=5000.

அவர் பயிர் B மற்றும் பயிர் C சிறந்த பயிராக தேர்வு செய்யலாம்.

<u>கேள்வி3 .</u>

ஹிந்துஸ்தான் நிறுவனத்தின் ஆராய்ச்சி துறை மூன்று வகையான ஷாம்புகளை அறிமுகபடுத்த சந்தைப்படுத்தும் துறைக்கு நிதி ஒதுக்க பரித்துரைக்கிறது. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வெவ்வேறான விற்பனை நிலையில் எதிர்பார்க்கப்படும் அளித்தல்களுக்கு ஏற்பசாம்புகளை சந்தைப் படுத்துகிறது.

ஷாம்புகளின் வகைகள்	மதிப்பிடப்பட்ட விற்பனை (அலகுகளில்)		
	15000	10000	5000
முட்டை ஷாம்பு	30	10	10
கிளினிக் ஷாம்பு	40	15	5
டீலக்ஸ் ஷாம்பு	55	20	3

தீர்வு:

ஷாம்புகளின் வகைகள்	மதிப்பிடப்பட்ட விற்பனை (அலகுகளில்)			குறைந்தபட்சம்	அதிகபட்சம்
	15000	10000	5000		
முட்டை ஷாம்பு	30	10	10	10	30
கிளினிக் ஷாம்பு	40	15	5	5	40
டீலக்ஸ் ஷாம்பு	55	20	3	3	55

(i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு

அதிகபட்சம் (10,5,3)=10.

முட்டை ஷாம்பூவைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

(ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு

குறைந்தபட்சம் (30,40,55)=30.

முட்டை ஷாம்பூவைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

கேள்வி4.

கொடுக்கப்பட்ட அளித்தல் அணியின் உகந்த தீர்வை (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மற்றும் (ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி காண்க.

செயற்பாங்கு	சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடுகள்			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	14	9	10	5
A_2	11	10	8	7
A_3	9	10	10	11
A_4	8	10	11	13

தீர்வு:

செயற்பாங்கு	சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடுகள்				குறைந்தபட்சம் ஊதியம்	அதிகபட்சம் ஊதியம்
	S_1	S_2	S_3	S_4		
A_1	14	9	10	5	5	14
A_2	11	10	8	7	7	11
A_3	9	10	10	11	9	11
A_4	8	10	11	13	8	13

(i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு

அதிகபட்சம்(5,7,9,8)=9. உகந்த முடிவு A_3ஆகும்.

(ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு

குறைந்தபட்சம் (14,11,11,13)=11.

உகந்த முடிவு A_2 மற்றும் A_3.

குறிப்பு: **வோகல் தோராய மதிப்பு முறையில் அதிக வித்தியாசம் உள்ள நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள குறைந்த செலவிற்கு ஒதுக்கீடு செய்ய வேண்டும்**

5 மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 10.1

கேள்வி8.

வோகலின் தோராய முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமான தீர்வை காண்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	அளிப்பு
O_1	2	3	11	7	6
O_2	1	0	6	1	1
O_3	5	8	15	9	10
தேவை	7	5	3	2	

தீர்வு: மொத்தம் அளிப்பு = மொத்தம் தேவை = 17

முதல் ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	வித்தியாசம்
O_1	2	3	11	7	6	(1)
O_2	1	0	6	(1) 1	1/0	(1)
O_3	5	8	15	9	10	(3)
b_j	7	5	3	2/1		
வித்தியாசம்	(1)	(3)	(5)	(6)		

இரண்டாவது ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	வித்தியாசம்
O_1	2	(5) 3	11	7	6/1	(1)
O_3	5	8	15	9	10	(3)
b_j	7	5/0	3	1		
வித்தியாசம்	(3)	(5)	(4)	(2)		

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_3	D_4	a_i	வித்தியாசம்
O_1	(1) 2	11	7	1/0	(5)
O_3	5	15	9	10	(4)
b_j	7/6	3	1		
வித்தியாசம்	(3)	(4)	(2)		

நான்காவது ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_3	D_4	a_i	வித்தியாசம்
O_3	(6) 5	15	9	10/4	(4)
b_j	6/0	3	1		
வித்தியாசம்	-	-	-		

ஐந்தாவது ஒதுக்கீடு:

	D_3	D_4	a_i	வித்தியாசம்
O_3	15	9	4/3/0	(6)
b_j	3/0	1/0		
வித்தியாசம்	-	-		

இறுதி ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(1) 2	(5) 3	11	7	6
O_2	1	0	6	(1) 1	1
O_3	(6) 5	8	(3) 15	(1) 9	10
வித்தியாசம்	7	5	3	2	

போக்குவரத்து அட்டவணை:

$O_1 \to D_1, O_1 \to D_2, O_2 \to D_4, O_3 \to D_1, O_3 \to D_3, O_3 \to D_4$

(i.e) $x_{11} = 12, x_{12} = 5, x_{24} = 1, x_{31} = 6, x_{33} = 3, x_{34} = 1$

மொத்தம் செலவு $= (1 \times 2) + (5 \times 3) + (1 \times 1) + (6 \times 5) + (3 \times 15) + (1 \times 9) = 2 + 15 + 1 + 30 + 45 + 9 = 102$

கேள்வி 9.

வோகலின் தோராய முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	அளிப்பு
O_1	5	8	3	6	30
O_2	4	5	7	4	50
O_3	6	2	4	6	20
தேவை	30	40	20	10	

தீர்வு: மொத்தம் அளிப்பு = மொத்தம் தேவை = 100

முதல் ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	வித்தியாசம்
O_1	5	8	3	6	30	(2)
O_2	4	5	7	4	50	(1)
O_3	6	**(20)** **2**	4	6	20/0	(2)
b_j	30	40/20	20	10		
வித்தியாசம்	(1)	**(3)**	(1)	(2)		

இரண்டாவது ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	வித்தியாசம்
O_1	5	8	(20) **3**	6	30/10	(2)
O_2	4	5	7	4	50	(1)
b_j	30	20	20/0	10		
வித்தியாசம்	(1)	(3)	**(4)**	(2)		

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு: :

	D_1	D_2	D_4	a_i	வித்தியாசம்
O_1	5	8	6	10	(1)
O_2	4	(20) **5**	4	50/30	(1)
b_j	30	20/0	10		
வித்தியாசம்	(1)	**(3)**	(2)		

நான்காவது ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_4	a_i	வித்தியாசம்
O_1	5	6	10	(1)
O_2	4	(10) **4**	30/20	(0)
b_j	30	10/0		
வித்தியாசம்	(1)	**(2)**		

ஐந்தாவது ஒதுக்கீடு:

	D_1	a_i	வித்தியாசம்
O_1	(10) 5	10/0	-
O_2	(20) 4	20/0	-
b_j	30/10/0		
வித்தியாசம்	(1)		

இறுதி ஒதுக்கீடு

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(10) 5	8	(20) 3	6	30
O_2	(20) 4	(20) 5	7	(10) 4	50
O_3	6	(20) 2	4	6	20
b_j	30	40	20	10	

போக்குவரத்து அட்டவணை::

$O_1 \rightarrow D_1, O_1 \rightarrow D_3, O_2 \rightarrow D_1, O_2 \rightarrow D_2, O_2 \rightarrow D_4, O_3 \rightarrow P_2$

(i.e) $x_{11} = 10, x_{13} = 20, x_{21} = 20, x_{22} = 20, x_{24} = 10, x_{32} = 20$

மொத்தம் செலவு $= (10 \times 5) + (20 \times 3) + (20 \times 4)$
$+(20 \times 5) + (10 \times 4) + (20 \times 2)$
$= 50 + 60 + 80 + 100 + 40 + 40 = 370$

கேள்வி11.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படைத் தீர்வை கீழ்க்கண்ட முறைகளில் காண்க:

	I	II	III	அளிப்பு
A	**1**	**2**	**6**	**7**
B	**0**	**4**	**2**	**12**
C	**3**	**1**	**5**	**11**
தேவை	**10**	**10**	**10**	

(i) வடமேற்கு மூலைமுறை

(ii) மீச்சிறு செலவு முறை

(iii) வோகலின் தோராய முறை

தீர்வு: மொத்தம் தேவை = மொத்தம் அளிப்பு = 30.

(i) வடமேற்கு மூலைமுறை

முதல் ஒதுக்கீடு:

	I	II	III	a_i
A	**(7)** **1**	2	6	7/0
B	0	4	2	12
C	3	1	5	11
b_j	10/3	10	10	

இரண்டாவது ஒதுக்கீடு:

	I	II	III	a_i
B	**(3)** **0**	4	2	12/9
C	3	1	5	11
b_j	3/0	10	10	

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு: :

	II	III	a_i
B	**(9)** **4**	2	9/0
C	1	5	11
b_j	10/1	10	

நான்காவது ஒதுக்கீடு :

	II	III	a_i
C	**(1)** **1**	(10) 5	11/10/0
b_j	1/0	10/0	

இறுதி ஒதுக்கீடு

	I	II	III	**தேவை**
A	(7) 1	2	6	7
B	(3) 0	(9) 4	2	12
C	3	(1) 1	(10) 5	11
அளிப்பு	10	10	10	

போக்குவரத்து அட்டவணை:

$\mathbf{A \rightarrow I, B \rightarrow I, B \rightarrow II, C \rightarrow II, C \rightarrow III}$

(i.e) $\mathbf{x_{11} = 7, x_{21} = 3, x_{22} = 9, x_{32} = 1, x_{33} = 10}$

மொத்தம் செலவு$=(7 \times 1) + (3 \times 0) + (9 \times 4) + (1 \times 1)$
$+ (10 \times 5)$
$= 7 + 0 + 36 + 1 + 50 =$ **Rs. 94**

(ii) மீச்சிறு செலவு முறை

மொத்தம் தேவை = மொத்தம் அளிப்பு = 30.

முதல் ஒதுக்கீடு:

	I	II	III	a_i
A	1	2	6	7
B	**(10)** **0**	4	2	12/2
C	3	1	5	11
b_j	10/0	10	10	

இரண்டாவது ஒதுக்கீடு:

	II	III	a_i
A	2	6	7
B	4	2	2
C	**(10)** **1**	5	11/1
b_j	10/0	10	

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு: :

	III	a_i
A	6	7
B	(2) 2	2/0
C	5	1
b_j	10/8	

நான்காவது ஒதுக்கீடு :

	III	a_i
A	(7) 6	7/0
C	(1) 5	1/0
b_j	8/7/0	

இறுதி ஒதுக்கீடு

	I	II	III	**தேவை**
A	1	2	(7) 6	7
B	(10) 0	4	(2) 2	12
C	3	(10) 1	(1) 5	11
அளிப்பு	10	10	10	

போக்குவரத்து அட்டவணை:

$A \to III, B \to I, B \to III, C \to II, C \to III$

(i.e) $x_{13} = 7, x_{21} = 10, x_{23} = 2, x_{32} = 10, x_{33} = 1$

மொத்தம் செலவு $= (7 \times 6) + (10 \times 0) + (2 \times 2) + (10 \times 1) + (1 \times 5) = 42 + 0 + 4 + 10 + 5 =$ Rs. 61

<u>குறிப்பு:</u> **வோகல் தோராய மதிப்பு முறையில் அதிக வித்தியாசம் உள்ள நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள குறைந்த செலவிற்கு ஒதுக்கீடு செய்ய வேண்டும்**

(iii) வோகலின் தோராய முறை

மொத்தம் தேவை = மொத்தம் அளிப்பு = 30.

முதல் ஒதுக்கீடு:

	I	II	III	a_i	வித்தியாசம்
A	1	2	6	7	(1)
B	0	4	**(10)** **2**	12/2	(2)
C	3	1	5	11	(2)
b_j	10	10	10/0		
வித்தியாசம்	(1)	(1)	**(3)**		

Largest வித்தியாசம் = 3. Allocate min (10, 12) to (B, III)

இரண்டாவது ஒதுக்கீடு:

	I	II	III	a_i	வித்தியாசம்
A	1	2	6	7	(1)
B	0	4	**(10)** **2**	12/2	(2)
C	3	1	5	11	(2)
b_j	10	10	10/0		
வித்தியாசம்	(1)	(1)	**(3)**		

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு::

	I	II	a_i	வித்தியாசம்
A	1	2	7	(1)
B	**(2)** **0**	4	2/0	**(4)**
C	3	1	11	(2)
b_j	10/8	10		
வித்தியாசம்	(1)	(1)		

நான்காவது ஒதுக்கீடு:

	I	II	a_i	வித்தியாசம்
A	(7) 1	2	7/0	(1)
C	3	1	11	(2)
b_j	8/1	10		
வித்தி யாசம்	(2)	(1)		

	I	II	a_i	வித்தி யாசம்
C	(1) 3	(10) 1	11/1/0	(2)
b_j	1/0	10/0		
வித்தியாசம்	-	-		

இறுதி ஒதுக்கீடு

	I	II	III	தேவை
A	1	2	6	7
B	(2) 0	4	(10) 2	12
C	3	(10) 1	5	11
அளிப்பு	10	10	10	

$A \to I, B \to I, B \to III, C \to I, C \to II$

(i.e) $x_{11} = 7, x_{21} = 2, x_{23} = 10, x_{31} = 1, x_{32} = 10$

மொத்தம் செலவு$=(7 \times 1) + (2 \times 0) + (10 \times 2) + (1 \times 3) + (10 \times 1) = 7 + 0 + 20 + 3 + 10$

$=$ ரூபாய் 40

பயிற்சி 10.2

கேள்வி5.

ஒரு கணினி மையத்தில் மூன்று திட்டமிடும் நிபுணர்கள் உள்ளனர். அந்த மையத்தில் மூன்று பயன்பாட்டு திட்டங்கள் ஏற்படுத்தப்பட வேண்டும். மையத்தின் தலைவர் திட்டங்களை கவனமாக பரிசீலித்து, மூன்று திட்டமிடல் நிபுணர்கள் எடுத்துக் கொள்ளும் கணினி நேரத்தை மதிப்பீடு செய்கிறார்.

		திட்டங்கள்		
		P	Q	R
திட்டநிபுணர்	1	120	100	80
	2	80	90	110
	3	110	140	120

மொத்த கணினி நேரத்தை குறைக்குமாறு திட்டங்களுக்கான திட்ட நிபுணர்களை ஒதுக்கீடு செய்க

தீர்வு: நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் சமம்

படி 1:

ஒவ்வொரு நிரைகளிலும் சிறிய உறுப்பைத் தேர்ந்தெடுத்து அதே நிரையில் உள்ள மற்ற உறுப்புகளிலிருந்து கழிப்போம்.

		திட்டங்கள்		
		P	Q	R
திட்டநிபுணர்	1	40	20	0
	2	0	10	30
	3	0	30	10

படி 2 :

நிரல் Q இல் சிறிய உறுப்பைத் தேர்ந்தெடுத்து அதே நிரல் உள்ள மற்ற உறுப்புகளிலிருந்து கழிக்கவும்.

		திட்டங்கள்		
		P	Q	R
திட்டநிபுணர்	1	40	10	0
	2	0	0	30
	3	0	20	10

ஒவ்வொரு நிரல் மற்றும் நிரையில் குறைந்தது ஒரு பூஜ்ஜியத்தைக் கொண்டிருப்பதால், நாம் ஒதுக்கீடு செய்ய ஆரம்பிக்கலாம்

.**படி 3**: (ஒதுக்கீடு) : A நிரையில் சரியாக ஒரு பூஜ்ஜியத்தைக் கொண்டுள்ளது. அதை □ மற்றும் அதன் நிரலில் உள்ள மற்ற பூஜ்ஜியங்களை x ஆல் குறிக்கவும்.

		திட்டங்கள்		
		P	Q	R
திட்டநிபுணர்	1	40	10	[0]
	2	~~0~~	[0]	30
	3	[0]	20	10

இப்போது அனைத்து 3 நிரல்களும் திட்டநிபுணர் ஒதுக்கப்பட்டுள்ளன. உகந்த பணி அட்டவணை

திட்டநிபுணர்	1	2	3
திட்டங்கள்	R	Q	P
செலவு	80	90	110

மொத்த செலவு

உகந்த பணிக்கான (குறைந்தபட்சம்) செலவு ₹ 280

கேள்வி6.

ஒரு பல்பொருள் அங்காடியின் தலைவரின் கீழ் பணி புரியும் நான்கு பணியாளர்கள் நான்கு வேலைகளை செய்ய வேண்டும். ஒவ்வொரு பணியாளரும் ஒவ்வொரு வேலையையும் முடிக்கும் வேலைத் திறனில் மாறுபட்டுள்ளனர். ஒவ்வொரு பணியாளரும் ஒவ்வொரு வேலையையும் முடிக்க ஆகும் நேரம் (மணியில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

		வேலை			
		1	2	3	4
பணியாளர்கள்	P	8	26	17	11
	Q	13	28	4	26
	R	38	19	18	15
	S	9	26	24	10

மொதத் நேரத்தை குறைக்குமாறு ஒவ்வொரு பணியாளருக்கும் எவ்வாறு பணிகளை ஒதுக்க வேண்டும்.

தீர்வு: பல பணிகளின் எண்ணிக்கை துணை அதிகாரிகளின் எண்ணிக்கைக்கு சமம்.

படி 1: ஒவ்வொரு நிரைகளிலும் சிறிய உறுப்பைத் தேர்ந்தெடுத்து அதே நிரையில் உள்ள மற்ற உறுப்புகளிலிருந்து கழிப்போம்.

	1	2	3	4
P	0	18	9	3
Q	9	24	0	22
R	23	4	3	0
S	0	17	15	1

படி 2: நிரல் 2 இல் சிறிய உறுப்பைத் தேர்ந்தெடுத்து அதே நிரல் உள்ள மற்ற உறுப்புகளிலிருந்து கழிக்கவும்.

	1	2	3	4
P	0	14	9	3
Q	9	20	0	22
R	23	0	3	0
S	0	13	15	1

படி 3 :

	1	2	3	4
P	[0]	14	9	3
Q	9	20	[0]	22
R	23	[0]	3	~~0~~
S	~~0~~	13	15	1

படி 4:

இப்போது S வரிசையில் பூஜ்ஜியம் இல்லை.

அதனால் நாம் கீழே உள்ளபடி தொடர்கிறோம்

	1	2	3	4
P	[0]	14	9	3
Q	~~9~~	~~20~~	~~[0]~~	~~22~~
R	~~23~~	~~[0]~~	~~3~~	~~0~~
S	~~0~~	13	15	1

பெறப்பட்ட குறைக்கப்பட்ட அணி உள்ள அனைத்து பூஜ்ஜியங்களையும் மறைப்பதற்கு குறைந்தபட்ச எண்ணிக்கையிலான கோடுகளை வரைந்துள்ளோம். அனைத்து வெளிப்படுத்தப்பட்ட உறுப்புகளிலிருந்தும் மிகச்சிறிய உறுப்பு 1. அனைத்து வெளிப்படுத்தப்பட்ட உறுப்புகளிலிருந்தும் இதை கழிப்போம் மற்றும் இரண்டு வரிகளின் குறுக்குவெட்டில் இருக்கும் உறுப்புகளுடன் அவற்றைச் சேர்க்கிறோம். இதனால், புதிய பணிக்கான மற்றொரு குறைக்கப்பட்ட சிக்கலைப் பெறுகிறோம்.

	1	2	3	4
P	0	13	8	3
Q	10	20	0	22
R	24	0	3	0
S	0	12	14	0

இப்போது அனைத்து கீழ்நிலை அதிகாரிகளும் ஒதுக்கீட்டு பணிகளாக உள்ளனர்.

பணியாளர்கள்	P	Q	R	S
வேலை	1	3	2	4
மணிநேர எண்ணிக்கை	8	4	19	10

உகந்த பணி (குறைந்தபட்சம்) மணிநேரம் =41

<u>கேள்வி7.</u>

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கின் செலவு அணிக்கான உகந்த தீர்வை காண்க.

இடம்

		1	2	3	4
	P	11	17	8	16
விற்பனையாளர்	Q	9	7	12	6
	R	13	16	15	12
	S	14	10	12	11

தீர்வு:<u>நிரைகளின் எண்ணிக்கை நிரல்களின் எண்ணிக்கை</u>

<u>படி 1:</u>

ஒவ்வொரு நிரைகளிலும் சிறிய உறுப்பைத் தேர்ந்தெடுத்து அதே நிரையில் உள்ள மற்ற உறுப்புகளிலிருந்து கழிப்போம்.

	1	2	3	4
P	3	9	0	8
Q	3	1	6	0
R	1	4	3	0
S	4	0	2	1

படி 2: நிரல் 1 இல் சிறிய உறுப்பைத் தேர்ந்தெடுத்து அதே நிரல் உள்ள மற்ற உறுப்புகளிலிருந்து கழிக்கவும்.

	1	2	3	4
P	2	9	0	8
Q	2	1	6	0
R	0	4	3	0
S	3	0	2	1

படி 3 :

	1	2	3	4
P	2	9	0	8
Q	2	1	6	0
R	0	4	3	0
S	3	0	2	1

விற்பனையாளர்	P	Q	R	S
இடம்	3	4	1	2
செலவு	8	6	13	10

மொத செலவு = 37

<u>கேள்வி8.</u>

A,B,C,D.E மற்றும் F என்ற திறந்த வெளி இடங்களுக்கு 1,2,3, மற்றும் 4 ஆகிய நான்கு வண்டிகள் சென்று நிறுத்த இடங்களை ஒதுக்க வேண்டும். நான்கு வண்டிகள் கொண்டு சென்று நிறுத்த ஆகும் பயண செய்த தூரம் குறைக்குமாறு ஒதுக்கீடு செய்க. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணியானது தூரத்தை குறிக்கிறது.

	1	**2**	**3**	**4**
A	**4**	**7**	**3**	**7**
B	**8**	**2**	**5**	**5**
C	**4**	**9**	**6**	**9**
D	**7**	**5**	**4**	**8**
E	**6**	**3**	**5**	**4**
F	**6**	**8**	**7**	**3**

தீர்வு:

இங்கு லாரிகளின் எண்ணிக்கை 4 ஆகவும், காலி இடங்கள் 6 ஆகவும் உள்ளது. எனவே கொடுக்கப்பட்ட பணி நியமன பிரச்சனை சமநிலையற்ற பிரச்சனை. எனவே அதை சமநிலைப்படுத்த அனைத்து உள்ளீடுகளும் பூஜ்ஜியத்துடன் இரண்டு போலி நிரல்களை அறிமுகப்படுத்துகிறோம்.

(லாரி)

		1	2	3	4	d	d
(காலி இடங்கள்)	A	4	7	3	7	0	0
	B	8	2	5	5	0	0
	C	4	9	6	9	0	0
	D	7	5	4	8	0	0
	E	6	3	5	4	0	0
	F	6	8	7	3	0	0

இங்கு நான்கு லாரிகளுக்கு 4 காலி இடங்களை மட்டுமே ஒதுக்க முடியும்

படி 1: எல்லா வரிசைகளிலும் பூஜ்ஜியங்கள் இருப்பதால் தேவையில்லை

படி 2: ஒவ்வொரு நிரலிலும் உள்ள சிறிய மதிப்பை அதே நிரலில் உள்ள மற்ற மதிப்புகளில் இருந்து கழிக்கவேண்டும்

	1	2	3	4	d	d
A	0	5	0	4	0	0
B	4	0	2	2	0	0
C	0	7	3	6	0	0
D	3	3	1	5	0	0
E	2	1	2	1	0	0
F	2	6	4	0	0	0

படி 3 :

	1	2	3	4	d	d
A	0	5	0	4	0	0
B	4	0	2	2	0	0
C	0	7	3	6	0	0
D	3	3	1	5	0	0
E	2	1	2	1	0	0
F	2	6	4	0	0	0

காலி இடங்கள்	A	B	C	D	E	F
லாரி	3	2	1	-	-	4
தூரம்	3	2	4	0	0	3

குறைந்தபட்சம் 12 கிமீ தூரம் பயணிக்க வேண்டும

CHAPTER – I

1. A=(1 2 3) எனில், AA^T - ன் தரம் **தீர்வு :** 1

2. ஒவ்வொரு உறுப்பும் 1 எனக் கொண்ட $m \times n$ வரிசை உடைய அணியின் தரம் **தீர்வு :** 1

3. T = $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ என்பது ஒரு மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி எனில் , சமநிலையில் A – ன் மதிப்பு **தீர்வு :** ¼

4. A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, எனில் , ρ(A) = **தீர்வு : 2**

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் **தீர்வு :** 3

6. வரிசை n உடைய அலகு அணியின் தரம் **தீர்வு :** n

7. ρ (A) = r எனில் , பின்வருவனவற்றில் எது சரி ? **தீர்வு :** A ஆனது குறைந்தபட்சம் ஒரு r வரிசை பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையாவது பெற்றிருக்கும் .

8. A = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ எனில், AA^T - ன் தரம் **தீர்வு :** 3

9. $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் 2 எனில் , λ -ன் மதிப்பு **தீர்வு : 1**

10. மூலைவிட்ட அணி –ன் தரம் $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & & & \\ & \mathbf{2} & & & & \\ & & \mathbf{-3} & & & \\ & & & \mathbf{0} & & \\ & & & & \mathbf{0} & \\ & & & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **தீர்வு :** 3

11. T = $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & x \end{pmatrix}$ என்பது மாறுதல் நிகழ்வு அணி எனில் x - ன் மதிப்பு **தீர்வு :** 0.4

12. பின்வருவனவற்றில் எது ஒரு அணிக்கான அடிப்படை உருமாற்றம் ஆகாது ? **தீர்வு :** $R_i \to 2R_i + 2C_j$

13. ρ(A) = ρ(A, B) எனில் , தொகுப்பானது **தீர்வு :** ஒருங்கமைவு உடையது

14. ρ(A) = ρ(A, B)= மாறிகளின் எண்ணிக்கை எனில் தொகுப்பானது **தீர்வு :** ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது

15. ρ (A) ≠ ρ (A, B) எனில் தொகுப்பானது **தீர்வு :** ஒருங்கமைவு அற்றது

16. ஒரு மாறுதல் நிகழ்தகவு அணியில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளின் மதிப்பும் எந்த எண்ணுக்கு சமமாகவோ அல்லது பெரியதாகவோ இருக்கும் ? **தீர்வு : 0**

17. AX = B என்ற சமச்சீரற்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் மாறிகளின் எண்ணிக்கை n எனில் , தொகுப்பானது ஒரே ஒரு தீர்வு எப்போது பெறும் ? **தீர்வு :** ρ (A) = ρ (A, B) = n

18. 4x + 6 y = 5 , 6x + 9 y = 7 என்ற சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு **தீர்வு :** தீர்வு இல்லை

19. x + 2 y + 3z = 1 , 2x + y + 3z = 2 , 5x + 5y + 9z = 4 என்ற சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு **தீர்வு :** ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு

20. |A| ≠ 0 , எனில் , A ஒரு **தீர்வு :** பூஜ்ஜியக் கோவை அணி

21. k ≠ _ எனில் , x + y + z = 2 , 2x + y – z = 3 , 3x + 2 y + k = 4, என்ற நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது , ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும் **தீர்வு : 0**

22. கிரேமரின் விதியைக் கொண்டு ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற தேவையான கட்டுப்பாடு , **தீர்வு :** Δ ≠ 0

23. $\frac{a_1}{x} + \frac{b_1}{y} = c_1$, $\frac{a_2}{x} + \frac{b_2}{y} = c_2$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$ எனில் , (x, y) - ன் மதிப்பு **தீர்வு :** $\left(\frac{-\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{-\Delta_1}{\Delta_3}\right)$

24. $|A_{n\times n}| = 3$ |adjA| = 243 எனில் n -ன் மதிப்பு **தீர்வு :** 6

25. பூஜ்ஜிய அணியின் தரம் **தீர்வு :** 0

CHAPTER - II

1. $\int \frac{1}{x^3} dx$ - ன் மதிப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $\frac{-1}{2x^2} + c$

2. $\int 2^x dx$ - ன் மதிப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $\frac{2^x}{\log 2} + c$

3. $\int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx$ - ன் மதிப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $\sin x + c$

4. $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\cos 3x} dx$ - ன் மதிப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $-\cos 2x + c$

5. $\int \frac{\log x}{x} dx$, $x > 0$ - ன் மதிப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $\frac{1}{2}(\log x)^2 + c$

6. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$ - ன் மதிப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $2\sqrt{1 + e^x} + c$

7. $\int \sqrt{e^x}\, dx$ - ன் மதிப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $2\sqrt{e^x} + c$

8. $\int e^{2x}[2x^2 + 2x] dx$ - ன் மதிப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $e^{2x}x^2 + c$

9. $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$ - ன் மதிப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $\log|e^x + 1| + c$

10. $\int \left[\frac{9}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right] dx$ - ன் மதிப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $9\log|x - 3| - \log|x + 1| + c$

11. $\int \frac{2x^3}{4+x^4} dx$ - ன் மதிப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $\frac{1}{2}\log|4 + x^4| + c$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-36}}$ - ன் மதிப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $\log\left|x + \sqrt{x^2 - 36}\right| + c$

13. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}} dx$ - ன் மதிப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $2\sqrt{x^2 + 3x + 2} + c$

14. $\int_0^1 (2x + 1)\, dx$ - ன் மதிப்பு **தீர்வு : 2**

15. $\int_2^4 \frac{dx}{x}$ - ன் மதிப்பு **தீர்வு :** $\log 2$

16. $\int_0^\infty e^{-2x}\, dx$ - ன் மதிப்பு **தீர்வு :** ½

17. $\int_{-1}^1 x^3 e^{x^4} dx$ - ன் மதிப்பு **தீர்வு : 0**

18. f(x) ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு மற்றும் a<c<b எனில் $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$ - க்கு சமமான தொகையிடல் ,

தீர்வு : $\int_a^b f(x)\, dx$

19. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$ - ன் மதிப்பு **தீர்வு :** 2

20. $\int_0^1 \sqrt{x^4(1 - x)^2} dx$ - ன் மதிப்பு **தீர்வு :** 1 /12

21. $\int_0^1 f(x)\, dx = 1$, $\int_0^1 x\, f(x) = a$ மற்றும் $\int_0^1 x^2 f(x) dx = a^2$ எனில் , $\int_0^1 (a - x)^2 f(x) dx$ - ன் மதிப்பு **தீர்வு :** 0

22. $\int_2^3 f(5 - x) dx - \int_2^3 f(x)\, dx$ - ன் மதிப்பு **தீர்வு :** 0

23. $\int_0^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ - ன் மதிப்பு **தீர்வு :** 28/3

24. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\, dx$ - ன் மதிப்பு **தீர்வு :** $\log 2$

25. காமா சார்புக்கான காரணிய பெருக்க அடிப்படையில் n = 8 எனும்பொழுது $\Gamma(n)$ – ன் மதிப்பு **தீர்வு :** 5040

26. $\Gamma(n)$ - ன் மதிப்பு **தீர்வு :** (n – 1)!

27. $\Gamma(1)$ - ன் மதிப்பு **தீர்வு :** 1

28. n > 0 எனில் , $\Gamma(n)$ - க்கு சமமான தொகையீடு **தீர்வு :** $\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx$

29. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$- ன் மதிப்பு **தீர்வு :** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

30. $\int_0^\infty x^4 e^{-x} dx$ - ன் மதிப்பு **தீர்வு :** 4!

CHAPTER - III

1. $y = x(4 - x)$ என்ற வளைவரையானது 0 மற்றும் 4 எனும் எல்லைகளுக்குள் , x - அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பு **<u>தீர்வு :</u>** 32/3 ச . அலகுகள்
2. $y = e^{-2x}$ என்ற வளைவரையானது $0 \le x \le \infty$ எனும் எல்லைகளுக்குள் , x - அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பு **<u>தீர்வு :</u>** ½ ச . அலகு
3. $y = \frac{1}{x}$ என்ற வளைவரை 1 மற்றும் 2 எனும் எல்லைகளுக்குள் ஏற்படுத்தும் பரப்பு **<u>தீர்வு :</u>** log2 ச . அலகுகள்
4. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய்ச் சார்பு $MR = e^{\frac{-x}{10}}$ எனில் , அதன் வருவாய் **<u>தீர்வு :</u>** $10\left(1 - e^{\frac{-x}{10}}\right)$
5. MR மற்றும் MC என்பன இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலைச் செலவு சார்பு என்பதை குறிக்குமெனில் அதன் இலாபச் சார்பு **<u>தீர்வு :</u>** $P = \int (MR - MC)\, dx + k$
6. தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகள் முறையே $D(x) = 16 - x^2$, $S(x) = 2x^2 + 4$ எனில் , அதன் சமநிலை விலை **<u>தீர்வு :</u>** 2
7. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு $MR = 30 - 6x$ மற்றும் $MC = -24 + 3x$, இங்கு x என்பது உற்பத்தி எனில் , இலாபச் சார்பு **<u>தீர்வு :</u>** $54x - \frac{9x^2}{2} + k$
8. தேவை மற்றும் அளிப்பு சார்புகள் முறையே $D(x) = 20 - 5x$ மற்றும் $S(x) = 4x + 8$ எனில் , அதன் சமநிலை விலை **<u>தீர்வு :</u>** 40/3
9. இறுதிநிலை வருவாய் $MR = 35 + 7x - 3x^2$ எனில் , அதன் சராசரி வருவாய் AR = **<u>தீர்வு :</u>** $35 + \frac{7x}{2} - x^2$
10. இலாபச் சார்பு p(x) ஆனது பெருமமடைவது **<u>தீர்வு :</u>** MC – MR = 0
11. தேவை x - க்கு விலை p - ஐ பொருத்து தேவை நெகிழ்ச்சி ஓர் அலகு எனில் . **<u>தீர்வு :</u>** வருவாய் ஒரு மாறிலி
12. இறுதி நிலைச் சார்பு $MR = 100 - 9x^2$ – ன் தேவைச் சார்பு **<u>தீர்வு :</u>** $100 - 3x^2$
13. தேவைச் சார்பு $p_d = 28 - x^2$ –க்கு $x_0 = 5$ மற்றும் $p_0 = 3$ எனும் போது நுகர்வோர் உபரி **<u>தீர்வு :</u>** 250/3 அலகுகள்
14. அளிப்புச் சார்பு $p_s = 2x^2 + 4$ –க்கு $x_0 = 2$ மற்றும் $p_0 = 12$ எனும் போது உற்பத்தியாளர் உபரி **<u>தீர்வு :</u>** 32/3 அலகுகள்
15. y - அச்சு , y = 1 மற்றும் y = 2 எனும் எல்லைக்குள் அடைப்படும் y = x - ன் பரப்பு **<u>தீர்வு :</u>** 3/2 ச . அலகுகள்
16. ஒரு பொருளின் அளிப்புச் சார்பு P = 3 + x மற்றும் $x_0 = 3$ எனில் , உற்பத்தியாளர் உபரி **<u>தீர்வு :</u>** 9/2 அலகுகள்
17. இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு $MC = 100\sqrt{x}$, T.C = 0 மற்றும் வெளியீடு 0 எனில் சராசரிச் சார்பு AC ஆனது **<u>தீர்வு :</u>** $\frac{200}{3}x^{\frac{1}{2}}$
18. ஒரு சந்தை பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகள் முறையே $P(x) = (x - 5)^2$ மற்றும் $S(x) = x^2 + x + 3$ எனில் , அதன் சமன்நிலை விலை x_0= **<u>தீர்வு :</u>** 2
19. ஒரு சந்தை பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகள் முறையே $D(x) = 25 - 2x$ மற்றும் $S(x) = \frac{10+x}{4}$ எனில் அதன் சமநிலை விலை P_0 = **<u>தீர்வு :</u>** 5
20. MR மற்றும் MC என்பன முறையே இறுதிநிலை வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலைச் செலவு மேலும் , $MR - MC = 36x - 3x^2 - 81$ எனில் , x - ல் பெரும இலாபமானது **<u>தீர்வு :</u>** 9
21. ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவாய் மாறிலி எனில் , அதன் தேவைச் சார்பு **<u>தீர்வு :</u>** MR
22. தேவைச் சார்பு p - க்கு , $\int \frac{dp}{p} = k \int \frac{dx}{x}$ எனில் , k = **<u>தீர்வு :</u>** $\frac{-1}{\eta_d}$
23. $y = e^x$ எனும் வளைவரை 0 யிலிருந்து 1 எனும் எல்லைகளுக்குள் x - அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு **<u>தீர்வு :</u>** (e –1) ச . அலகுகள்
24. பரவளையம் $y^2 = 4x$ ஆனது அதன் செவ்வகலத்துடன் ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு **<u>தீர்வு :</u>** 8/3 ச . அலகுகள்
25. $y = |x|$ எனும் வளைவரை , 0 - லிருந்து 2 வரை ஏற்படுத்தும் அரங்கத்தின் பரப்பு **<u>தீர்வு :</u>** 2 ச . அலகுகள்

CHAPTER – IV

1. $\frac{d^4y}{dx^4} - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + \frac{dy}{dx} = 3$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி ஆனது **தீர்வு :** 1

2. $\sqrt{\frac{d^2y}{dx^2}} = \sqrt{\frac{dy}{dx} + 5}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி முறையே **தீர்வு :** 2 மற்றும் 1

3. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)} - 4 = 0$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி முறையே **தீர்வு :** 2 மற்றும் 6

4. $\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 + 2y^{\frac{1}{2}} = x$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடு **தீர்வு :** வரிசை 1 மற்றும் படி 3 உடையது

5. $y = ae^x + be^{-x}$ என்ற சமன்பாட்டில் a – யையும் b யையும் நீக்கக் கிடைக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு **தீர்வு :** $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$

6. $y = cx + c - c^3$ எனில் , அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு **தீர்வு :** $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

7. $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி **தீர்வு :** $e^{\int Pdy}$

8. $(D^2 + 4)\, y = e^{2x}$ இன் நிரப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $A \cos 2x + B \sin 2x$

9. $y = mx + c$ - இன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (m மற்றும் c என்பன மாறத்தக்க மாறிலிகள்) **தீர்வு :** $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

10. $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 2e^{4x}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தொகை **தீர்வு :** x^2e^{4x}

11. $\frac{dx}{dy} + Px = 0$ என்பதன் தீர்வானது **தீர்வு :** $x = ce^{-py}$

12. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி $\sec^2 x$ எனில் P = **தீர்வு :** $2 \tan x$

13. $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$ - இன் தொகையீட்டுக் காரணி **தீர்வு :** $\frac{1}{x}$

14. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ (இங்கு P மற்றும் Q என்பன x - ஐ சார்ந்த சார்புகள்) என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு **தீர்வு :** $ye^{\int Pdx} = \int Q\, e^{\int Pdx}dx + c$

15. $y = e^{-2x}(A \cos x + B \sin x)$ - ல் A மற்றும் B யை நீக்குவதன் மூலம் அமைக்கப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு **தீர்வு :** $y_2 + 4y_1 + 5 = 0$

16. $f(D)y = e^{ax}$ இங்கு $f(D) = (D - a)^2$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத்தொகை **தீர்வு :** $\frac{x^2}{2}e^{ax}$

17. $x^2 + y^2 = a^2$ என்பதன் வகைகெழுச் சமன்பாடு **தீர்வு :** $xdx+ydy=0$

18. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$ என்பதன் நிரப்புச் சார்பு **தீர்வு :** $A + Be^x$

19. $(3D^2 + D - 14)y = 13e^{2x}$ - ன் சிறப்புத் தொகை **தீர்வு :** xe^{2x}

20. $\frac{dy}{dx} = \cos x$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு **தீர்வு :** c மாறத்தக்க மாறிலி

21. $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ என்ற வடிவில் உள்ள சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு தீர்க்கப்பட பயன்படுத்தப்படும் பிரதியிடல் **தீர்வு :** $y = v\,x$

22. $\frac{dx}{dy} = f\left(\frac{x}{y}\right)$ என்ற வடிவில் உள்ள சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு தீர்க்கப்பட பயன்படுத்தப்படும் பிரதியிடல் **தீர்வு :** $x = v\,y$

23. $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-y)}{x(x+y)}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் $y = vx$ மற்றும் $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ என பிரதியீடு செய்யும் போது கிடைக்கும் , மாறிகள் பிரிக்கத்தக்க வகையில் அமைந்த சமன்பாடு **தீர்வு :** $\frac{1+v}{2v^2}dv = -\frac{dx}{x}$

24. பின்வருவனவற்றுள் எது சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும் **தீர்வு :** $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)\, dy = 0$

25. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{f'\left(\frac{y}{x}\right)}$ என்ற சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு **தீர்வு :** $f\left(\frac{y}{x}\right) = kx$

CHAPTER - V

1. $\Delta^2 y_0$ = **தீர்வு :** $y_2 - 2y_1 + y_0$

2. Δ f (x) = **தீர்வு :** f (x + h) – f (x)

3. E ≡ **தீர்வு :** 1 + Δ

4. h=1, எனில் , $\Delta (x^2)$ = **தீர்வு :** 2x + 1

5. c ஒரு மாறிலி எனில் Δ c = **தீர்வு :** 0

6. m மற்றும் n என்பவை மிகை முழுக்கள் எனில் $\Delta^m \Delta^n$ f (x) = **தீர்வு :** Δ^{m+n} f (x)

7. 'n' மிகை முழு எண் எனில் , $\Delta^n [\Delta^{-n}$ f (x)] **தீர்வு :** f (x)

8. E f (x) = **தீர்வு :** f (x + h)

9. ∇ ≡ **தீர்வு :** $1 - E^{-1}$

10. ∇ f(a) = **தீர்வு :** f(a) – f(a – h)

11. (x_0 , y_0) , (x_1 , y_1) என்ற புள்ளிகள் கொடுக்கப் பட்டால் இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம்

தீர்வு : $y(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1$

12. இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகலின் சூத்திரம் எப்பொழுது பயன்படுத்தப்படும்

தீர்வு : சம மற்றும் சமமற்ற இடைவெளிகளுக்கு

13. $f(x) = x^2 + 2x + 2$ மற்றும் h=1 எனில் Δ f(x) – ன் மதிப்பு **தீர்வு :** 2x + 3

14. கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து $\Delta^3 y_0$ – ன் மதிப்பு **தீர்வு :** 0

x	5	6	9	11
y	12	13	15	18

CHAPTER – VI

1. நிகழ்வின் நிகழ்தகவு கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறியின் சாத்தியமுள்ள மதிப்புகளைப் பெருக்குவதன் மூலம் பெறப்பட்ட எந்த மதிப்பு எடையிட்ட சராசரிக்கு சமம் என அழைக்கப்படுகிறது .

தீர்வு : எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு

2. நாள் ஒன்றுக்கு பொருள்களின் தேவையானது , மூன்று நாள்களுக்கு முறையே 0.29, 0.40,0.35 அலகுகள் ஆகும் . அலகு ஒன்றுக்கு இலாபம் 0.50 பைசாக்கள் எனில் , மூன்று நாள்களுக்கான எதிர்பார்க்கப்பட்ட இலாபம் **தீர்வு :** 3.045 , 3.8 , 3.85

3. x - ஐ விவரிக்கும் நிகழ்தகவு குறிப்பிட்ட மதிப்பை விட சமமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ உள்ள நிகழ்தகவு **தீர்வு :** திரள் நிகழ்தகவு

4. E(X) = 5 மற்றும் E(Y) = –2 எனில் , E(X – Y) - ன் மதிப்பானது **தீர்வு :** 7

5. இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையில் எந்தவிதமான மதிப்பும் அனுமானிக்கலாம் எனும் மாறியானது

தீர்வு : தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி

6. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ் தகவு பரவலைப் குறிக்கும் ஒரு சூத்திரம் அல்லது சமன்பாடு **தீர்வு :** நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

7. ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X மற்றும் X - இன் நிகழ்தகவு p(x) எனில் , சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பானது **தீர்வு :** ∑ xp(x)

8. நிகழ்தகவு பரவலில் பின்வரும் எந்த ஒன்று சாத்தியமில்லை **தீர்வு :** p(x) = – 0.5

9. c ஒரு மாறிலி எனில் , E(c) இன் மதிப்பு **ீர்வு :** c

10. ஒரு தனித்த நிகழ்தகவுப் பரவல் இதன் மூலமும் குறிப்பிடப்படலாம்

தீர்வு : அட்டவணை , வரைபடம், கணிதவியல் சமன்பாடு

11. ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு இதன் மூலமும் குறிப்பிடப்படலாம்

தீர்வு : வரைபடம், கணிதவியல் சமன்பாடு

12. ஒரு தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவு பரவலில் c என்பது ஒரு மாறிலி என்றால் P(X=c) எப்போதும் எதற்கு சமமாக இருக்கும் **தீர்வு :** பூஜ்ஜியம்

13. E [X – E (X)] என்பது **தீர்வு :** 0

14. $E[X - E(X)]^2$ என்பது **தீர்வு :** V (X)

15. சமவாய்ப்பு மாறியானது குறை மதிப்புகளை பெறும் எனில் , அந்த குறை மதிப்புகள் பெறுவது

தீர்வு : நேர்மறை நிகழ்தகவுகள்

16. f(x) = 2 x , 0 ≤ x ≤1 எனில் , f(x) ஒரு **தீர்வு :** நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

17. f(x) ஆனது ஒரு அடர்த்திச் சார்பு எனில் , $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ஆனது எப்போதும் இதற்கு சமமாக இருக்கும்

தீர்வு : ஒன்று

18. ஒரு சோதனையின் அனைத்து வெளிப்பாடுகளின் பட்டியல் மற்றும் ஒவ்வொரு வெளிப்பாட்டிற்கும் தொடர்புடைய நிகழ்தகவானது இவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது **தீர்வு :** நிகழ்தகவு பரவல்

19. எந்த ஒன்று சமவாய்ப்பு சோதனைக்கான உதாரணம் அல்ல ?

தீர்வு : குறிப்பிட்ட வருடத்திற்கு ஒரு நிறுவனத்தால் பெறப்பட்ட அனைத்து மருத்துவகாப்பீட்டு உரிமைக்கோரிக்கைகள்.

20. கூறுவெளிக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணியல் மதிப்புகளின் தொகுப்பு **தீர்வு :** சமவாய்ப்பு மாறி

21. முடிவுறு அல்லது கணக்கிடத்தக்க முடிவுறா எண் மதிப்புகளை பெறும் ஒரு மாறி **தீர்வு :** தனித்தது

22. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது

X=x	-1	-2	0	1	2
P(x)	k	2k	3k	4k	5k

எனில் , k - இன் மதிப்பானது **தீர்வு :** 1/15

23. $p(x) = \frac{1}{10}, x = 10$ எனில் , E(X) மதிப்பானது **தீர்வு :** 1

24. ஒரு தனித்த நிகழ்தகவுச் சார்பு p(x) ஆனது எப்போதும் **தீர்வு :** எதிர்மறை அல்லாதது

25. ஒரு தனித்த பரவல் சார்பில் அனைத்து நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகையானது **தீர்வு :** ஒன்று

26. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பு என்பது **தீர்வு :** சராசரி

27. ஒரு தனித்த நிகழ்தகவுச் சார்பு p(x) எப்போதும் குறையற்றது மற்றும் அது அமையும் இடைவெளியானது **தீர்வு :** 0 மற்றும் 1

28. நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு p(x) –ன் மீப்பெரு மதிப்பானது **தீர்வு :** ஒன்று

29. ஒரு நாட்டில் உள்ள நபர்களின் உயரத்தை கொண்டு அமையும் சமவாய்ப்பு மாறியின் வகையானது

தீர்வு : தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி

30. பரவல் சார்பு F(x) ஆனது **தீர்வு :** P (X ≤ x)

CHAPTER - VII

1. இயல்நிலைப் பரவலைக் கண்டுபிடித்தவர் **<u>தீர்வு :</u>** டீ மாய்வர்

2. $X \sim N(9,81)$ எனில் திட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் மாறி Z என்பது **<u>தீர்வு :</u>** $Z = \frac{X-9}{9}$

3. Z என்பது திட்ட இயல்நிலை மாறி எனில் $Z = -0.5$ லிருந்து $Z = -3.0$ வரை அமையும் உருப்படிகளின் விகிதமானது . **<u>தீர்வு :</u>** 0.3072

4. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, இயல்நிலை பரவலின் வளைவு மாற்றுப்புள்ளியில் மீப்பெரு நிகழ்தகவானது **<u>தீர்வு :</u>** $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{1}{2}}$

5. சராசரியும் மாறுபாட்டளவையும் சமமாக இருக்கும் நிகழ்தகவுப் பரவலானது **<u>தீர்வு :</u>** பாய்சான்

6. பொம்மைகள் தயாரிக்கும் நிறுவனம் சராசரியாக 1% குறைபாடுள்ள தயாரிப்புகளை அளிக்கின்றது . கூறெடுத்தலில் 100 பொம்மைக்கு 3 பொம்மைகள் குறைபாடுள்ளவைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவின் மதிப்பானது **<u>தீர்வு :</u>** 0.0613

7. $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{72\pi}}\right)\frac{e^{-(x-10)^2}}{72}$ $-\infty < x < \infty$ என்ற இயல்நிலை பரவலின் பண்பளவைகளானது **<u>தீர்வு :</u>** (10,36)

8. ஒரு உற்பத்தியாளர் தயாரிக்கும் மின் விசை மாற்றுக்குமிழ்களில் (switches) 2 சதவீத தயாரிப்புகள் குறைபாடுள்ளவை என்று அறியப்படுகிறது . ஒரு பேழையில் இருக்கும் 50 மின்விசை மாற்றுக்குமிழ்களில் அதிக பட்சமாக 2 குறைபாடுகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது . **<u>தீர்வு :</u>** $2.5\ e^{-1}$

9. ஒவ்வொரு சோதனையிலும் வெற்றி என்பது தோல்விக்கான வாய்ப்பைப் போல் இருமடங்கு எனில் அடுத்து வரும் 6 முயற்சிகளில் குறைந்த பட்சம் நான்கு முறை வெற்றி பெறுவதற்கான வாயப்பானது **<u>தீர்வு :</u>** 496/729

10. ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகளான b(n,p) – க்கு சராசரியின் மதிப்பு 4 மற்றும் மாறுபாடு 4/3 எனில் $P(X \geq 5)$ இன் மதிப்பானது . **<u>தீர்வு :</u>** $4(2/3)^6$

11. சராசரியாக ஒரு தேர்வில் 40% மாணவர்கள் தோல்வி அடைகின்றனர் . ஒரு குழுவிலுள்ள 6 மாணவர்களில் குறைந்தபட்சம் 4 நபர் வெற்றி அடைவதற்கான நிகழ்தகவானது . **<u>தீர்வு :</u>** 0.5443

12. ஒரு குறிப்பிட்ட வழிதடத்தில் செல்லும் விமானத்தில் பயணிக்கும் 40 சதவீத பயணிகள் பயணிக்கும் நேரத்தில் தங்களுடன் எந்த ஒரு உடைமைகளையும் எடுத்துச் செல்வதில்லை . அவ்வழித்தடத்தில் செல்லும் விமானங்கள் 15 இருக்கைகள் கொண்டது எனில் , உடமைகள் இல்லாமல் பயணிக்கும் பயணிகளின் சராசரி எண்ணிக்கையானது . **<u>தீர்வு :</u>** 6.00

13. பின்வரும் கூற்றில் (கூற்றுகளில்) எவை இயல்நிலைப் பரவல் வளைவரை தொடர்புடையதாக இருக்கும் ? **<u>தீர்வு :</u>** (i)இது சமச்சீரானது மற்றும் மணிவடிவம் உடையது . (ii)இது தொலைத்தொடுகோட்டை உடையது , அதாவது வளைவரை கிடை அச்சினை தொடர்ந்து சென்றாலும் அதனை தொடாமல் இணையாக செல்லும் .
(iii) இதன் சராசரி , இடைநிலை மற்றும் முகடு ஆகியன ஒன்றுகின்றன .

14. பின்வருவனவற்றுள் எவை பாய்சான் பரவலை உருவாக்காது ?
<u>தீர்வு :</u>பெட்ரோல் நிலையத்திற்கு வந்து சேரும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை

15. சராசரி 70 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 10 எனக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலை சமவாய்ப்பு மாறி X தழுவுகிறது . X ஆனது 72 மற்றும் 84 - க்கு இடையில் உள்ளபோது அதன் நிகழ்தகவானது **தீர்வு :** 0.340

16. புதிதாக தேர்ச்சிபெற்ற பட்டயக் கணக்கரின் ஆரம்பகால வருடாந்திர ஊதியம் இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது . இதன் சராசரி ₹ 1,80,000 மற்றும் திட்டவிலக்கம் ₹ 10,000 ஆகும் . சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் புதிதாக தேர்ச்சிபெற்ற பட்டயக் கணக்கர் வருடத்திற்கு ₹ 1,65,000 லிருந்து ₹ 1,75,000 வரை ஈட்டுவதற்கு உண்டான நிகழ்தகவானது . **தீர்வு :** 0.242

17. புள்ளியியல் வகுப்பில் பயிலும் மாணவர்களின் உயரமானது இயல்நிலை பரவலை பின்பற்றி சராசரி 172 செ.மீ மற்றும் மாறுபாடு 25 செ.மீ பெற்றுள்ளது , எனில் 165 செ.மீ மற்றும் 181 செ.மீ க்கும் இடைப்பட்ட உயரத்தில் இருக்கும் மாணவர்களின் விகிதமானது . **தீர்வு :** 0.883

18. புள்ளிவிவர ஆய்வில் தொலை தூரத்தில் இருப்பவர்களின் உரையாடல்களின் நேரமானது இயல்நிலை பரவலைபின்பற்றி சராசரி 240 நொடிகளாகவும் , திட்ட விலக்கம் 40 நொடிகளாகவும் உள்ளதாக அறியப்படுகிறது , எனில் 180 நொடிகளுக்கும் குறைவாக உரையாடல் நேரத்தை முடிப்பவர்களின் விகிதமானது . **தீர்வு :** 0.067

19. கேப் நகர மக்கள் தொகையில் 21 சதவீத மக்கள் DSTV எனும் செயற்கைகோள் தொலைக்காட்சி சேவைக்கு சந்தாதாரர்களாக தங்களை இணைத்துக் கொண்டனர் மாதிரிக்கூறாக நான்கு வீட்டினைத் தேர்ந்தெடுக்கும் பட்சத்தில் அனைத்து வீடுகளும் DSTV சேவையினை பயன்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவானது . **தீர்வு :** 0.0019

20. திட்ட இயல்நிலை அட்டவணையை பயன் படுத்துகையில் z = 2.18 - க்கு வலப்புறம் மற்றும் z = - 1.75 – க்கு இடதுபுறம் அமையும் மதிப்புகளுக்கான நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலானது **தீர்வு :** 0.0547

21. ஒரு மைத்தரை அச்சு இயந்திரம் (Inkjet Printer) முதல் முறை பழுது ஏற்படுதுவதற்கான கால அளவு இயல்நிலைப் பரவலை ஒத்துள்ளது . இதன் சராசரி 1500 மணி நேரம் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 200 மணி நேரம் எனில் 1000 மணி நேரத்திற்கு முன்பாக அவ்வியந்திரம் பழுதடைவதற்கான விகிதமானது **தீர்வு :** 0.0062

22. புதிதாகப் பிறந்த குழந்தையின் எடையானது இயல்நிலைப் பரவலை பின்பற்றி சராசரியாக 3.2 கிலோ மற்றும் திட்ட விலக்கமாக 1.1 கிலோ பெற்றுள்ளது . சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்தெடுக்கப்படும் புதிதாகப் பிறந்த ஒரு குழந்தையின் எடையில் 2.0 கிலோவுக்கும் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது. **தீர்வு :** 0.138

23. ஒரு குறிப்பிட்ட வங்கியின் கடன் அட்டை தாரர்கள் , தங்களது கடன் அட்டையைப் பயன் படுத்தி செலவு செய்யும் மாதாந்திர செலவு இயல் நிலைப் பரவலை ஒத்துள்ளது . சராசரி ₹ 1295.00 மற்றும் திட்டவிலக்கம் ₹ 750.00 எனில் , கடன் அட்டைதாரர்கள் தங்களின் கடன் அட்டையின் மூலம் மாதம் ₹ 1500 - க்கு மேலாக செலவழிக்கும் கடன் அட்டைதாரர்களின் விகிதாச்சாரமானது . **தீர்வு :** 0.392

24. z ஒரு திட்ட இயல்நிலைமாறி என்க . z - க்கு வலப்புறம் உள்ள பரப்பு 0.8413 எனில் , z - ன் மதிப்பானது **தீர்வு :** –1.00

25. z - க்கு இடப்புறம் அமையும் (z - என்பது திட்ட இயல்நிலை பரவலை கொண்டுள்ளது) பரப்பு 0.0793 , எனில் z - ன் மதிப்பானது **தீர்வு :** -1.41

26. $P(Z > z) = 0.8508$ எனில் z - ன் (z - என்பது திட்ட இயல்நிலை பரவலை கொண்டுள்ளது) மதிப்பானது **தீர்வு :** –1.04

27. $P(Z > z) = 0.5832$ எனில் z - ன் (z - என்பது திட்ட இயல்நிலை பரவலை கொண்டுள்ளது) மதிப்பானது **தீர்வு :** –0.21

28. ஈருறுப்புப் பரவலில் வெற்றிக்கான நிகழ் தகவானது தோல்விக்கான நிகழ்தகவைப் போல் இருமடங்கு எனில் நான்கு முயற்சிகளில் பூஜ்ஜிய வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு **தீர்வு :** 1/81

CHAPTER – VIII

1. முடிவுறு அல்லது முடிவுறா _______ என்பது அதில் உள்ள முடிவுறு அல்லது முடிவுறா உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்தாகும் . **<u>தீர்வு :</u>** முழுமைத்தொகுதி

2. ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் .... கூறு என அழைக்கப்படுகிறது. **<u>தீர்வு :</u>** முடிவுறு உட்கணம்

3. ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் முடிவுறு உட்கணத்தை ....என கூறலாம். **<u>தீர்வு :</u>** கூறு

4. கூறுகளிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட எந்தவொரு புள்ளியியல் அளவைகளும்......... எனப்படும். **<u>தீர்வு :</u>** கூறு பண்பளவை

5. .... என்பது முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கு ஒரு சமமான வாய்ப்பை அளிக்கும் ஒன்றாகும். **<u>தீர்வு :</u>** சமவாய்ப்பு கூறு

6. சமவாய்ப்பு கூறானது முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் மாதிரியில் இடம்பெறுவதற்கான சமவாய்ப்பைப் பெற்றிருக்கும் உறுப்புகளால் ஆனது என கூறியவர். **<u>தீர்வு :</u>** ஹார்பர்

7. கீழ்க்காண்பவற்றில் எது நிகழ்தகவு கூறெடுப்பு வகையைச் சார்ந்தது . **<u>தீர்வு :</u>** எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு

8. N அளவுள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறையில் முதன் முறை ஒரு உறுப்பு தேர்வு செய்யும்போது அதன் நிகழ்தகவு **<u>தீர்வு :</u>** $1/N$

9. ....யில் ஒரு சீரற்ற முழுமைத் தொகுதியானது சீரான துணை முழுமைத் தொகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. **<u>தீர்வு :</u>** படுகை வாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை

10. கூறெப்பில் உள்ள பிழைகள் ________ **<u>தீர்வு :</u>** இருவகை

11. கூறு அளவையைப் பயன்படுத்தி முழுமைத் தொகுதி பண்பளவைக்கான மிக சிறந்த மதிப்பை பெற முற்படும் முறையே .... **<u>தீர்வு :</u>** மதிப்பீட்டு முறை

12. மதிப்பீட்டு அளவையானது மாதிரி புள்ளியியல் அளவையின் _________ ஐ மதிப்பிட பயன்படுகிறது. **<u>தீர்வு :</u>** முழுமைத்தொகுதி பண்பளவை

13. ....என்ற பண்பானது ஒரு மதிப்பீட்டு அளவையானது மற்றொரு மதிப்பீட்டு அளவையை ஒப்பிடும்போது திறன் வாய்ந்தது என வரையறுக்கப்படுகிறது. **<u>தீர்வு :</u>** திறன்தன்மை

14. $P[|\tilde{\theta} - \theta| < \varepsilon] \to 1$, $n \to \infty$, $\varepsilon > 0$ எனில் $\hat{\theta}$ என்பது θ - ன்__________ உடைய மதிப்பீட்டு அளவையாகும். **<u>தீர்வு :</u>** நிலைத்தன்மை

15. மதிப்பீட்டு அளவையானது பண்பளவையில் குறித்த அனைத்து மதிப்பீடுகளையும் உள்ளடக்கிய தரவுகளைப் பெற்றிருந்தால் அது ________ வாய்ந்தது ஆகும். **<u>தீர்வு :</u>** நிறைவுத்தன்மை

16. முழுமைத் தொகுதி பண்பளவை கொடுக்கப்பட்ட இரு எண்களுக்கிடையே அமைந்துள்ளது என எதிர்பார்க்கப்படும் இடைவெளி பண்பளவையின் ____ இடைவெளியாகும். **<u>தீர்வு :</u>** இடைவெளி மதிப்பீடு

17. முழுமைத் தொகுதி பண்பளவையைக் குறித்த கருதுகோள் அல்லது கூற்றை உண்மை அல்லது அதற்கு மாறாக எடுத்துக்கொள்வது _____ ஆகும். **<u>தீர்வு :</u>** கருதுகோள்

18. முதல் வகைப்பிழை என்பது **<u>தீர்வு :</u>** H_0 உண்மை எனில் மறுக்கப்படுவது

19. இரண்டாவது வகைப்பிழை என்பது ______ ஆகும். **<u>தீர்வு :</u>** H_0 தவறு எனில் ஏற்பது

20. கூறுசராசரியின் திட்டப்பிழையானது **<u>தீர்வு :</u>** $\sigma/\sqrt{n}$

CHAPTER – IX

1. ஒரு காலம்சார் தொடரின் தரவுத் தொகுப்பு விவரங்களை பதிவு செய்யப்படும் இடைவெளி

தீர்வு : சமகால இடைவெளி , வாரம் ஒருமுறை , தொடர்ச்சியான கால புள்ளிகள்

2. ஒரு காலம்சார் தொடரில் __________ உள்ளன . **தீர்வு :** நான்கு கூறுகைள்

3. குறுகிய கால , ஏற்ற இறக்கத்துடன் அமையக் கூடிய ஒரு காலம்சார் தொடரின் கூறுகள்

தீர்வு : சீரற்ற மாறுபாடு

4. பருவகால மாறுபாடுகளின் உகந்த காரணிகள்

தீர்வு : வானிலை , விழாக்காலங்கள் ,சமூக பழக்கவழக்கங்கள்

5. T, S , C மற்றும் I ஆகிற கூறுகளைக் கொண்டக் காலம்சார் தொடரின் கூட்டு வடிவமைப்பானது

தீர்வு : y=T+S+C+I

6. போக்கை பொறுத்துவதற்கான மீச்சிறு வர்க்க முறையானது **தீர்வு :** மிகவும் துல்லியமானது

7. y = a+bx என்ற போக்கு கோட்டில் 'b' இன் மதிப்பானது **தீர்வு :** மிகை அல்லது குறை

8. ஒரு காலம்சார் தொடருடன் சார்ந்த நீண்டகால மாறுபாடுகளின் கூறுகளின் போக்கானது .

தீர்வு : நீள்போக்கு மாறுபாடு

9. பருவகால மாறுபாடு என்ற வேறுபாடுகள் நிகழ **தீர்வு :** ஒரு ஆண்டிற்குள்ளாக

10. நுகர்வோர் விலைக்குறியீட்டு எண்ணின் மற்றொரு பெயர்

தீர்வு : வாழ்க்கை செலவீட்டுக் குறியீட்டு எண்

11. இரு வேறு நகரங்களின் வாழ்க்கைத் தரக் குறியிட்டு எண்ணை ஒப்பிட்டுப் பயன்படுவது

தீர்வு : நுகர்வோர் விலை குறியீட்ட எண்

12. லாஸ் பியர் குறியீட்டு எண் = 110 , பாசி குறியீட்டு எண் = 108 எனில் , ஃபிஷர் தனித்த குறியீட்டு எண் = **தீர்வு :** 109

13. பொதுவாக பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்படும் குறியீட்டு எண் **தீர்வு :** விலை குறியீட்டு எண்

14. நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்ட எண்ணை அளிக்கக் கூடியது **தீர்வு :** குடும்ப வரவு செலவு முறை

15. கீழ்க்கண்ட எந்த குறியீட்டு எண் கால மாற்று சோதனையை நிறைவு செய்கிறது

தீர்வு : ஃபிஷர் தனித்த குறியீட்டு எண்

16 . நிறை குறியீட்டு எண் கணக்குகளில் நிகழ்கால அளவுகள் பயன்படுவது **தீர்வு :** பாசியின்முறை

17. எண் வடிவில் அளவிடக்கூடிய அளவுகள் குறிக்கபடுவது **தீர்வு :** x வரைபடம்

18. உற்பத்திப் பொருளின் தரத்தை பாதிக்கக் கூடிய மாறுபாடுகள் எத்தனை ? **தீர்வு :** 2

19 . ஒழுங்கற்ற இயற்கை ஏற்படுத்தும் மாறுபாடுகள் என்பது **தீர்வு :** தற்செயல் விளைவு

20. குறிப்பிடக்கூடிய விளைவுகள் ஏற்படுத்துவது

தீர்வு : குறைபாடுள்ள மூலப்பொருள்கள் , திறமையற்ற வேலை ஆட்கள் , குறைபாடுள்ள இயந்திரங்கள்

21. கட்டுபாட்டு வரைபடங்கள் பெற்றிருப்பவை **தீர்வு :** CL , LCL , UCL

22. $\bar{X}$ வரைபடம் என்பது **தீர்வு :** மாறிகளைக் கொண்ட கட்டுப்பாட்டு வரைபடம்

23. R - ஐ கணக்கிடப் பயன்படும் சூத்திரம் **தீர்வு :** $x_{max} - x_{min}$

24. $\bar{X}$ - வரைபடத்தின் மேல் கட்டுபாட்டு எல்லையை அளிக்க கூடியது **தீர்வு :** $\bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$

25. R வரைபடத்தின் கீழ் கட்டுபாட்டு எல்லையை அளிக்ககூடியது **தீர்வு :** $D_3\bar{R}$

CHAPTER – X

1. போக்குவரத்து கணக்கு எப்பொழுது சமநிலை யற்றது ? **<u>தீர்வு :</u>** மொத்த வழங்கல் ≠ மொத்த தேவை

2. சீரற்ற தீர்வில் ஒதுக்கீட்டு அறைகளின் எண்ணிக்கை ஆனது . **<u>தீர்வு :</u>** m+n–1 - க்கு சமம்

3. சீரான தீர்வில் ஒதுக்கீட்டி அறைகளின் எண்ணிக்கை ஆனது **<u>தீர்வு :</u>** m+n–1 - ஐ விட சிறியது

4. வோகலின் தோராய முறையில் உள்ள பெனாலிட்டி என்பது அந்த நிரை / நிரலுள்ள எதன் வித்தியாசத்தை குறிக்கிறது . **<u>தீர்வு :</u>** மிகச்சிறிய இரண்டு எண்கள்

5. ஒதுக்கீடு கணக்கில் எந்த ஒரு நிரை மற்றும் நிரலிலும் அடிப்படை ஒதுக்கீடுகளின் எண்ணிக்கை **<u>தீர்வு :</u>** ஒன்றும் மட்டும்

6. வடமேற்கு மூலை என்பதனை குறிப்பது **<u>தீர்வு :</u>** மேல் இடது மூலை

7. சில நேரங்களில் --------- முறையானது போக்குவரத்து கணக்கின் உகந்த தீர்வாக அமையும் **<u>தீர்வு :</u>** வோகலின் தோராய முறை

8. ஒதுக்கீட்டு கணக்கில் தீர்மான மாறி x_{ij} மதிப்பு --------- **<u>தீர்வு :</u>** 1 அல்லது 0

9. ஒதுக்கீடு கணக்கில் வழங்கல் மற்றும் சேருமிடம் சமமாக இல்லாவிட்டால் அவை **<u>தீர்வு :</u>** சமநிலையற்றது

10. ஒதுக்கீடு கணக்கில் ஒப்புக்கான நிரை அல்லது ஒப்புக்கான நிரல் உருவாக்கு வதற்கான நோக்கம் **<u>தீர்வு :</u>** மொத்த செயல்கள் மற்றும் மொத்த வளங்களை சமப்படுத்த

11. ஒரு ஒதுக்கீடு கணக்கின் தீர்வானது உகந்த தீர்வாக இருக்க **<u>தீர்வு :</u>** ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலில் ஒரே ஒரு ஒதுக்கீடு

12. மூன்று வேலைகள் மற்றும் நான்கு வேலையாட்கள் உள்ளடக்கிய ஒதுக்கீட்டு கணக்கில் சாத்தியமான ஒதுக்கீடுகளின் எண்ணிக்கை **<u>தீர்வு :</u>** 3

13. தீர்மான கோட்பாடு எதன் தொடர்புடையது

<u>தீர்வு :</u> (a)கிடைக்ககூடிய தகவல்களின் அளவு , (b) நம்பகத்தன்மை கொண்ட தீர்மானத்தை அளவீடு செய்வது , (c) வரிசைத் தொடர் பிரச்சினைகளுக்கு உகந்த தீர்மானங்களை தேர்ந்தெடுப்பது

14. சூழ்நிலைகளில் தீர்மானம் மேற்கொள்வதின் வகை . **<u>தீர்வு :</u>** (a) நிச்சயமான ,(b) நிச்சயமற்ற,(c) இடர்பாடு