பள்ளிக் கல்வித் துறை

சென்னை மாவட்டம்

கற்றல் கையேடு

2023 - 2024

மேல்நிலை இரண்டாம் ஆண்டு

கணிதவியல்

முன்னுரை

குறைந்தபட்ச கற்றல் பொருள் என்ற பெயரில் மாணவர்களுக்கான தனித்துவமான விஷயங்களை (**மேல்நிலை இரண்டாம் ஆண்டு - கணிதவியல்**) வெளிக்கொணர மதிப்புள்ள முழு வாய்ப்பை வழங்கிய எங்கள் மரியாதைக்குரிய முதன்மைக் கல்வி அதிகாரிக்கு எங்கள் மனமார்ந்த நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்கிறோம்.

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட அத்தியாயங்களின் அடிப்படையில் குறைந்தபட்ச கற்றல் பொருள் தயாரிக்கப்படுகிறது. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட அத்தியாயங்களுக்கு வகைப்பாடு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பாடப் புத்தகப் பயிற்சிப் பிரச்சனைகள் தீர்க்கப்படுகின்றன (2 மதிப்பெண்கள்; 3 மதிப்பெண்கள் மற்றும் 5 மதிப்பெண்கள்).

மாணவர்கள் வகைப்பாட்டின் அடிப்படையில் எடுத்துக்காட்டு சிக்கல்களைத் தயாரிக்க வேண்டும். அனைத்து பாடப்புத்தக MCQ பிரச்சனைகளும் தவறாமல் பயிற்சி செய்ய வேண்டும். வகைப்படுத்தலில் உள்ள அனைத்து பிரச்சனைகளையும் மாணவர்கள் பயிற்சி செய்ய வேண்டும்.

நல்ல முயற்சி எப்போதும் வெற்றியே

வாழ்த்துகள்!!!

Prepared by:

Thiru. S. Anantha Krishnan,
Headmaster,
M.F.S.D. Hr. Sec. School,
Sowcarpet, Chennai – 79.

Thiru. M.D. Purushothaman,
P.G.Asst.,(Maths),
D.R.B.C.C.C. Hr. Sec. School,
Perambur, Chennai – 11.

Thiru. D. Raman,
P.G.Asst.,(Maths),
Hindu Union Committee Hr. Sec. School,
Choolai, 600112.

Thiru. G. Kiran Kumar Reddy,
P.G.Asst.,(Maths),
S.K.D.T. Hr. Sec. School,
Villivakkam, Chennai - 49

Thiru. S. SenthilVel,
P.G.Asst.,(Maths),
DR. GMTTV Hr. Sec. School,
Sowcarpet, Chennai - 79

Thiru. RajendraPratap Yadav,
P.G.Asst.,(Maths),
M.F.S.D. Hr. Sec. School
Sowcarpet, Chennai - 79

பொருளடக்கம்

EXERCISE	2 - மதிப்பெண்	3 – மதிப்பெண்	5- மதிப்பெண்
1.1	EG: 1.2, 1.4, 1.7, 1.8, 1.11 EX: 1 (1)to(4)	EG: 1.3,1.5,1.6,1.9 EX : 2,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15	EG:1.1,1.10,1.12 EX :3,4
1.2	EG:1.13,1.15(1) EX: 1.16,1.17	EG :1.14,1.15(1),1.18,1.20 EX: 3(1)	EG :1.19,1.21 EX : 3(2) 3(3)
1.3		EG : 1.22 EX: 1(2)(1),3,4	EG : 1.23,1.24 EX : 2,5,1(3)(4)
1.4		EX : 1(I), 1(II), 2,3,4	EG : 1.25,1.26 EX : 5
1.5			EG: 1.27,1.28 EX :1(1)(2),2, 3, 4
1.6		EG: 1.33 EX: 1.6(1)(3)	EG: 1.29,1.30,1.31,1.32,.1.34 EX: 1.6 1(1), 1(2), 1(4),2,3
1.7		EG: 1.35 EX: 1(2)	EG: 1.36,1.37,1.38,1.39,1.40
2.1	EG:2.1 Ex 2.1 1-6		
2.2	EX : 2.2 1 (all subs. EACH)	Eg 2.2 Ex 2.2(all subs.),3	
2.3	EX: 1(1), 1(2)	EX: 2(1), 2(2),3	
2.4	EX : 1(1)-(3),2(1)-(3),3	EG: 2.3,2.4,2.5,2.6,2.7,2.8(1) EX : 4,5,6,7(1)	EG: 2.8(2) EX: 7(2)
2.5	EX: 1 (all subdvisions)	EG: 2.9,2.10(all sub division), 2.11, 2.12, 2.13, 2.16, 2.17 EX: 2,3,4,5,6,8,10	EG:2.14,2.15 EX:7,9
2.6	EG: 2.19,2.20	EG: 2.18,2.21 EX: 1,3,4,5(all subs)	EX: 2
2.7	EX: 1(1)(2)(3)	EG:2.22,2.23,2.24,2.25,2.26 EX: 1(4) 2 (1)(2)	EG:2.27 EX: 3,4,5,6
2.8	EG: 2.28,2.29 EX: 1,7	EG: 2.30,2.31(all) 2.32,2.33 EX: 1,2,3,5,7,8,9	EG: 2.34,2.35,2.36 EX: 4(1)(2)(3)(4)
3.1	EG: 3.3 E: 2,8,11,12	EG: 3.1,3.2,3.4,3.5,3.7 EX: 1,3,4,5,7,8,9,10	EG: 3.6 EX: 6
3.2	EG: 3.9,3.8,3.11,3.12,3.13	EG: 3.10,3.14 EX: 1,2,3,4,5	
3.3	EX: 7	EX: 1,2,3,4,6,7 EG: 3.16,3.17,3.18,3.19,3.20,3.21,3.22	EG: 3.15 EX: 5
3.4			EG: 3.23,3.24 EX: 1,2
3.5		EG: 3.25,3.26,3.27,3.29 EX: 1(1)(2) 2(1)(2),3,4,5(2)	EG: 3.28 EX: 5(1),7
3.6	EG; 3.30,3.31(1)(2) EX: 1,3,4,5	EX: 2	
11.1	EG: 11.1 (1) 11.3,11.4	EG: 11.1,11.2,11.5 EX: 2	EG: 11.3 EX: 4,5
11.2	EX: 1	EG: 11.6,11.7,11.8,11.9,11.10 EX: 2	EX: 3,4,5,6,7
11.3	EX: 1	EG: 11.13	EG: 11.11,11.12,11.14,11.15 EX: 2,3,4,5,6
11.4	EX: 5,6	EX: 1,2,3,4,7,8	EG: 11.16,11.17,11.18
11.5	EX: 1,3,4	EX: 2,5,8,9	EG: 11.19,11.20,11.21,11.22 EX: 6, 7
12.1	EG: 12.1 1(I)(ii)(iii)	EG: 12.5, 12.6, 12.8 EX: 2, 3, 4, 6, 7,8	EG: 12.2, 12.3, 12.4, 12.7, 12.9, 12.10 EX: 1, 5, 9, 10
12.2	EG: 12.12 EX: 1, 2, 3, 4	EG: 12.13, 12.14, 12.15, 12.16, 12.17, 12.18 EX: 6(iii)(iv), 7(I)(ii)(iii), 8(I)(ii), 9, 10, 11, 12	EG: 12.19

IMPORTANT 5 MARKS

அத்தியாயம் 4 - நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகள்

எடுத்துக்காட்டு : 4.4, 4.7, 4.20, 4.22, 4.23, 4.27, 4.28, 4.29

பயிற்சி : 4.1 - 6(I), 7, 8-(II)

பயிற்சி : 4.2 - 5 (III), 6(I)

அத்தியாயம் 5 - இரு பரிமாண பகுமுறை வடிவியல்

எடுத்துக்காட்டு : 5.10, 5.39, 5.40

பயிற்சி : 5.1 - 6

பயிற்சி : 5.2 - 4 (IV), 4(V), 8(V), 8(VI)

பயிற்சி : 5.4 - 3

பயிற்சி : 5.5 - 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

அத்தியாயம் 6 : வெக்டர் இயற்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

எடுத்துக்காட்டு : 6.3, 6.5,6.6,6.7,6.23(1)(II), 6.27, 6.33, 6.34, 6.35, 6.44, 6.46

பயிற்சி : 6.1- 7, 8, 9, 10

பயிற்சி : 6.3 = 4(I)(II)

பயிற்சி : 6.4 - 3

பயிற்சி : 6.5- 4, 5, 6

பயிற்சி : 6.7 - 1, 2, 3, 4, 5, 6,7

பயிற்சி : 6.8 - 1, 2, 4

பயிற்சி : 6.9 - 8

அத்தியாயம் 10: வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் (பயன்பாடு கணக்குகள்)

எடுத்துக்காட்டு : 10.27, 10.28, 10.29, 10.30

பயிற்சி : 10.8 - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

அத்தியாயம் 1 -
அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்
2 , 3- மதிப்பெண்கள்

2 மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 1.1 : எடுத்துக்காட்டு : 1.2, 1.4, 1.6, 1.7, 1.11, 1.13

தேற்றம் : 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8,

தேற்றம் 1.9 ஒவ்வொன்றையும் தனித்தனியாகக் கேட்கலாம்

பயிற்சி 1.2 : எடுத்துக்காட்டு 1.15 (I), 1.16 (I), (II), (III) மற்றும் 1.17

பயிற்சி 1.1 : 1(i). பின்வரும் அணிகளுக்குச் சேர்ப்பு அணி காண்க: $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

தீர்வு:

A = $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

adj A = $(A_c)^T$ = $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

பயிற்சி 1.1 (2) (i) பின்வரும் அணிகளுக்கு நேர்மாறு (காண முடியுமெனில்) நேர்மாறு காண்க . $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

தீர்வு: A = $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ (Adj A)

|A| = $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ = 6 – 4 = 2

Adj A = $\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

பயிற்சி 1.1(9): adj(A)=$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ எனில் A^{-1} -ஐ காண்க

தீர்வு:

adj A = $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

|adj A| = $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ = 0 + 2(36-18) + 0 = 2(18) = 36

$A^{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}$ (adj A) = $\pm\frac{1}{\sqrt{36}}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$= \pm\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

பயிற்சி 1.2 (1)(i):

பின்வரும் அணிகளுக்கு சிற்றணிக்கோவையை பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க :$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

தீர்வு:

A = $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; A ன் வரிசை 2 x 2;

ρ(A) ≤ min{2,2} = 2

|A| = $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$= 4 – 4 = 0 ; ρ(A) ≠ 2 ⟹ ρ(A) < 2

a_{11} = 2 ≠ 0 ⟹ 1 x 1 வரிசை பூஜ்ஜியத்திற்கு சமமாக இல்லை ρ(A) = 1

பயிற்சி 1.2 (1)(ii):

பின்வரும் அணிகளுக்கு சிற்றணிக்கோவையை பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க:$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

தீர்வு:

A = $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

A ன் வரிசை 3 X 2; ρ(A) ≤ min{3,2} = 2

|A| = $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$= 7 – 12 = -5 ≠ 0 ;

2 x 2 வரிசை பூஜ்ஜியத்திற்கு சமமாக இல்லை

⟹ ρ(A) = 2

பயிற்சி 1.2 (1)(iii):

பின்வரும் அணிகளுக்கு சிற்றணிக்கோவையை பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க:$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

தீர்வு:

A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

A ன் வரிசை 2 X 4; ρ(A) ≤ min{4,2} = 2

பரிசீலிக்க Δ_1= $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$ = -6 + 6 = 0

பரிசீலிக்க Δ_2= $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}$ = 6 – 6 = 0

சரிபார் |A| ≠ 0

பரிசீலிக்க Δ_3= $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ = -1 – 0 = -1 ≠ 0

2 x 2 வரிசை பூஜ்ஜியத்திற்கு சமமாக இல்லை என்பதால் ⟹ ρ(A) = 2

பயிற்சி 1.2 (1)(iv):

பின்வரும் அணிகளுக்கு சிற்றணிக்கோவையை பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

தீர்வு:

A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

A ன் வரிசை 3 X 3; ρ(A) ≤ min {3,3} = 3

Δ = $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

= 1(-4+6) + 2(-2+30) + 3(2 – 20)

= 1(2) + 2(28) + 3(-18) = 2 + 56 – 54 = 4 ≠ 0

3 x 3 வரிசை பூஜ்ஜியத்திற்கு சமமாக இல்லை என்பதால் ⟹ ρ(A) = 3

<u>3 மதிப்பெண் கேள்விகள்</u>

<u>பயிற்சி 1.1</u>

I(ii) பின்வரும் அணிகளுக்குச் சேர்ப்பு அணி காண்க: $\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$

<u>தீர்வு:</u> A = $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 3 & 7 & 2\end{pmatrix}$

adj A = $(A_c)^T$= $\begin{bmatrix}8-7 & 3-6 & 21-12\\ 7-6 & 4-3 & 9-14\\ 3-4 & 3-2 & 8-9\end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix}1 & -3 & 9\\ 1 & 1 & -5\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 1\\ 9 & -5 & -1\end{bmatrix}$

<u>1(iii).</u> பின்வரும் அணிகளுக்குச் சேர்ப்பு அணி காண்க: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$

<u>Solution:</u> A = $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$

Adj A =$(\frac{1}{3})^2\begin{bmatrix}2+4 & 2+4 & 4-1\\ -2-4 & 4-1 & 2+4\\ 4-1 & -4-2 & 2+4\end{bmatrix}^T$

$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}6 & 6 & 3\\ -6 & 3 & 6\\ 3 & -6 & 6\end{bmatrix}^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}6 & -6 & 3\\ 6 & 3 & -6\\ 3 & 6 & 6\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$

<u>பயிற்சி 1.1 (2) (iii):</u> பின்வரும் அணிகளுக்கு நேர்மாறு (காண முடியுமெனில்) நேர்மாறு காண்க . $\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$

<u>தீர்வு:</u>

A = $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 3 & 7 & 2\end{pmatrix}$ |A| = 2(8 - 7) – 3(6 – 3)+1(21 – 12)

= 2(1) – 3(3)+1(9) = 2 – 9 + 9 = 2

adj A = $(A_c)^T$ = $\begin{bmatrix}8-7 & 3-6 & 21-12\\ 7-6 & 4-3 & 9-14\\ 3-4 & 3-2 & 8-9\end{bmatrix}^T$ $\begin{matrix}2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 7 & 2 & 3 & 7 & 2\end{matrix}$

$= \begin{bmatrix}1 & -3 & 9\\ 1 & 1 & -5\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 1\\ 9 & -5 & -1\end{bmatrix}$ $\begin{matrix}2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 7 & 2 & 3 & 7 & 2\end{matrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ (Adj A) = $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 1\\ 9 & -5 & -1\end{bmatrix}$

<u>பயிற்சிசெய்க - Ex 1.1 2(ii)</u>

பயிற்சி 1.1 (5): A = $\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-8 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 7\\ 1 & -8 & 4\end{bmatrix}$ எனில், $A^{-1} = A^T$ என நிறுவுக.

<u>தீர்வு:</u>

A = $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-8 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 7\\ 1 & -8 & 4\end{pmatrix}$ மற்றும் $A^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}-8 & 4 & 1\\ 1 & 4 & -8\\ 4 & 7 & 4\end{bmatrix}$

$A\,A^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-8 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 7\\ 1 & -8 & 4\end{pmatrix} X \frac{1}{9}\begin{bmatrix}-8 & 4 & 1\\ 1 & 4 & -8\\ 4 & 7 & 4\end{bmatrix}$

$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix}64+1+16 & -32+4+28 & -8-8+16\\ -32+4+28 & 16+16+49 & 4-32+28\\ -8-8+16 & 4-32+28 & 1+64+16\end{bmatrix}$

$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix}81 & 0 & 0\\ 0 & 81 & 0\\ 0 & 0 & 81\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = I_3$

$A^T A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}-8 & 4 & 1\\ 1 & 4 & -8\\ 4 & 7 & 4\end{bmatrix} \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-8 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 7\\ 1 & -8 & 4\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix}64+16+1 & -8+16-8 & -32+28+4\\ -8+16-8 & 1+16+64 & 4+28-32\\ -32+28+4 & 4+28-32 & 16+49+16\end{bmatrix}$

$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix}81 & 0 & 0\\ 0 & 81 & 0\\ 0 & 0 & 81\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = I_3$

$A\,A^T = A^T A = I_3 \implies A^{-1} = A^T$

<u>பயிற்சி 1.1(6):</u>

A = $\begin{bmatrix}\mathbf{8} & \mathbf{-4}\\ \mathbf{-5} & \mathbf{3}\end{bmatrix}$ எனில் $\mathbf{A(adj\ A) = (adj\ A)A = |A|I_2}$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

<u>தீர்வு:</u>

$A = \begin{pmatrix}8 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}$ adj $A = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 8\end{pmatrix}$

$A(\text{adj } A) = \begin{pmatrix}8 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24-20 & 32-32\\ -15+15 & -20+24\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

$(\text{adj } A)A = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24-20 & -12+12\\ 40-40 & -20+24\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix}8 & -4\\ -5 & 3\end{vmatrix} = 24 - 20 = 4$

$|A|I_2 = 4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I_2 = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$. எனவே

நிரூபிக்கப்பட்டது

<u>பயிற்சி 1.1(9):</u> adj(A)= $\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{-6}\\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{6}\end{bmatrix}$ எனில் $\mathbf{A^{-1}}$ -ஐ காண்க.

<u>தீர்வு:</u>

adj $A = \begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ 6 & 2 & -6\\ -3 & 0 & 6\end{pmatrix}$

$|\text{adj } A| = \begin{vmatrix}0 & -2 & 0\\ 6 & 2 & -6\\ -3 & 0 & 6\end{vmatrix} = 0 + 2(36\text{-}18) + 0 = 2(18) = 36$

$A^{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}(\text{adj } A)$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{36}}\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ 6 & 2 & -6\\ -3 & 0 & 6\end{pmatrix}$

$= \pm\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ 6 & 2 & -6\\ -3 & 0 & 6\end{pmatrix}$

பயிற்சி 1.1 (7): $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{7} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$ **மற்றும்** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ **எனில்** $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ **என்பதைச் சரிபார்க்க.**

தீர்வு:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+10 & -9+4 \\ -7+25 & -21+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 18 & -11 \end{pmatrix}$

$|AB| = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 18 & -11 \end{vmatrix}$ = -77+ 90 = 13

$\text{adj}(AB) = \begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{pmatrix}$

$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}(\text{Adj } AB) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $|B| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ = -2 + 15 = 13

$\text{adj } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{|B|}(\text{Adj } B) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ மற்றும் $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$ = 15-14 = 1

$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A) = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 10-21 & -4+9 \\ -25+7 & 10-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{pmatrix}$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{pmatrix}$ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது

பயிற்சி 1.1(8): adj(A)= $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{12} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ **, எனில் A -ஐ காண்க.**

தீர்வு: $A = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj(adj } A)$

$|\text{Adj } A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

= 2(24-0)-(-4)(-6-14)+2(0+24)

= 2(24) + 4(-20) + 2(24) = 48 - 80 + 48 = 96 - 80 = 16

$\text{adj(adj } A) = \begin{bmatrix} 24-0 & 14+6 & 0+24 \\ 0+8 & 4+4 & 8-0 \\ 28-24 & -6+14 & 24-12 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 24 & 20 & 24 \\ 8 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 24 & 8 & 4 \\ 20 & 8 & 8 \\ 24 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

$A = \pm\frac{1}{\sqrt{16}}\begin{bmatrix} 24 & 8 & 4 \\ 20 & 8 & 8 \\ 24 & 8 & 12 \end{bmatrix} = \pm\frac{1}{4}4\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \pm\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

பயிற்சி 1.1(10): adj A = $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ **எனில் adj(adj(A)) -ஐ காண்க.**

தீர்வு:

$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{Adj(adj } A) = \begin{bmatrix} 2-0 & 0-0 & 0+2 \\ 0-0 & 1+1 & 0-0 \\ 0-2 & 0-0 & 2-0 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

பயிற்சி 1.1(11) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{\tan x} \\ \mathbf{-\tan x} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ **எனில்** $\mathbf{A^TA^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\cos 2x} & \mathbf{-\sin 2x} \\ \mathbf{\sin 2x} & \mathbf{\cos 2x} \end{bmatrix}$ **எனக்காட்டுக.**

தீர்வு:: $|A| = 1 + \tan^2 x$

$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{pmatrix}$ and $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)$

$A^{-1} = \frac{1}{1+\tan^2 x}\begin{pmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{pmatrix}$

$A^TA^{-1} = \frac{1}{1+\tan^2 x}\begin{pmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{1+\tan^2 x}\begin{pmatrix} 1-\tan^2 x & -\tan x - \tan x \\ \tan x + \tan x & -\tan^2 x + 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} & \frac{-2\tan x}{1+\tan^2 x} \\ \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} & \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$

பயிற்சி 1.1(12):

$\mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{14} & \mathbf{7} \\ \mathbf{7} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$ **எனில் A -ஐ காண்க.**

தீர்வு::

$A\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

$A \quad B \quad = C \Rightarrow A = C\,B^{-1}$

$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B|$ = -10 + 3 = -7

$\text{Adj } B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$A = C\,B^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -28+7 & -42+35 \\ -14+7 & -21+35 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -21 & -7 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-21}{-7} & \frac{-7}{-7} \\ \frac{-7}{-7} & \frac{14}{-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

பயிற்சி 1.1(13):

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ **மற்றும் AXB = C எனில் X என்ற அணியைக் காண்க.**

தீர்வு:

$AXB = C \Rightarrow A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}C\,B^{-1}$

$\Rightarrow (A^{-1}A)X(BB^{-1}) = A^{-1}C\,B^{-1} \quad \Rightarrow X = A^{-1}C\,B^{-1}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0+2 = 2$ & $\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 3+2 = 5$ & $\text{Adj } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{|B|}(\text{Adj } B) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0+2 & 0+2 \\ -2+2 & -2+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2-2 & 4+6 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

பயிற்சி 1.1 (14): A = $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ எனில் $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I)$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

A =

A = $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ $|A| = \begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}$ = 0 (0-1) - 1 (0-1) + 1(1-0)
= 0(-1) -1(-1) + 1(1)
= 0 + 1 + 1= 2

Adj A = $(A_c)^T$=

$$\begin{bmatrix}0-1&1-0&1-0\\1-0&0-1&1-0\\1-0&1-0&0-1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0+1+1&0+0+1&0+1+0\\0+0+1&1+0+1&1+0+0\\0+1+0&1+0+0&1+1+0\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3I = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(A^2 - 3I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix} = A^{-1}$$

பயிற்சி 1.2 (2) (i):

பின்வரும் அணிகளுக்கு ஏறுபடி வடிவத்தைப் பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க : $\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&-1&3&4\\5&-1&7&11\end{pmatrix}$

தீர்வு:

$$A = \begin{bmatrix}1&1&1&3\\2&-1&3&4\\5&-1&7&11\end{bmatrix}$$

$\sim \begin{bmatrix}1&1&1&3\\0&-3&1&-2\\0&-6&2&-4\end{bmatrix}$ $R_2 \to R_2 - 2R_1$; $R_3 \to R_3 - 5R_1$

$\sim \begin{bmatrix}1&1&1&3\\0&-3&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $R_3 \to R_3 - 2R_2$

ஏறுபடி வடிவத்தில் உள்ளது ;

பூஜ்யம் அல்லாத வரிசைகளின் எண்ணிக்கை = 2

$\Rightarrow \rho(A) = 2$

பயிற்சி 1.2 (2) (ii):

பின்வரும் அணிகளுக்கு ஏறுபடி வடிவத்தைப் பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க : $\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&-1&2\\1&-2&3\\1&-1&1\end{pmatrix}$

தீர்வு:

$$A = \begin{pmatrix}1&2&-1\\3&-1&2\\1&-2&3\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$\sim \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-7&5\\0&-4&4\\0&-3&2\end{pmatrix}$ $R_2 \to R_2 - 3R_1$; $R_3 \to R_3 - R_1$; $R_4 \to R_4 - R_1$

$\sim \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-84&60\\0&-84&84\\0&-84&56\end{pmatrix}$ $R_2 \to 12R_2$; $R_3 \to 21R_3$; $R_4 \to 28R_4$

$\sim \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-84&60\\0&0&24\\0&0&-4\end{pmatrix}$ $R_3 \to R_3 - R_2$; $R_4 \to R_4 - R_2$

$\sim \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-84&60\\0&0&4\\0&0&-4\end{pmatrix}$ $R_3 \to \frac{1}{6}R_3$ $\sim \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-84&60\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$ $R_4 \to R_4 + R_3$

பூஜ்யம் அல்லாத வரிசைகளின் எண்ணிக்கை = 3

$\Rightarrow \rho(A) = 3$

பயிற்சி 1.2 (2) (iii):

பின்வரும் அணிகளுக்கு ஏறுபடி வடிவத்தைப் பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க : $\begin{pmatrix}3&-8&5&2\\2&-5&1&4\\-1&2&3&-2\end{pmatrix}$

தீர்வு:

$A = \begin{pmatrix}3&-8&5&2\\2&-5&1&4\\-1&2&3&-2\end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix}-1&2&3&-2\\2&-5&1&4\\3&-8&5&2\end{bmatrix}$ $R_1 \leftrightarrow R_3$

$\sim \begin{bmatrix}-1&2&3&-2\\0&-1&7&0\\0&-2&14&-4\end{bmatrix}$ $R_2 \to R_2 + 2R_1$; $R_3 \to R_3 + 3R_1$

$\sim \begin{bmatrix}-1&2&3&-2\\0&-1&7&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix}$ $R_3 \to R_3 - 2R_2$

பூஜ்யம் அல்லாத வரிசைகளின் எண்ணிக்கை = 3

$\Rightarrow \rho(A) = 3$

பயிற்சி 1.2 (3)(i):

பின்வரும் அணிகளுக்கு காஸ்-ஜோர்டன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி நேர்மாறு காண்க: $\begin{pmatrix}2&-1\\5&-2\end{pmatrix}$

தீர்வு: $A = \begin{pmatrix}2&-1\\5&-2\end{pmatrix}$

$[A|I] = \left(\begin{array}{cc|cc}2&-1&1&0\\5&-2&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}10&-5&5&0\\10&-4&0&2\end{array}\right)$ $R_1 \to 5R_1$; $R_2 \to 2R_2$

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc}10&-5&5&0\\0&1&-5&2\end{array}\right)$ $R_2 \to R_2 - R_1$

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc}2&-1&1&0\\0&1&-5&2\end{array}\right)$ $R_1 \to \frac{1}{5}R_1$

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc}2&0&-4&2\\0&1&-5&2\end{array}\right)$ $R_1 \to R_1 + R_2$ $\sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&1&-5&2\end{array}\right)$ $R_1 \to \frac{1}{2}R_1$

$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix}-2&1\\-5&2\end{pmatrix}$

பயிற்சி 1.3(1)(i):

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை நேர்மாறு அணி காணல் முறையை பயன்படுத்தி தீர்க்க: 2x + 5y = -2, x + 2y = -3

தீர்வு: 2x + 5y = -2, x + 2y = -3

$$\begin{pmatrix}2&5\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$$

A X = B $\Rightarrow X = A^{-1}B$

$A = \begin{pmatrix}2&5\\1&2\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix}2&5\\1&2\end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0$, A^{-1} உள்ளது

adj A = $\begin{pmatrix}2&-5\\-1&2\end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix}2&-5\\-1&2\end{pmatrix}$

$X = A^{-1}B$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}2&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}-4+15\\2-6\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}11\\-4\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\4\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ x = -11, y = 4

பயிற்சி 1.3(1)(ii):

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை நேர்மாறு அணி காணல் முறையை பயன்படுத்தி தீர்க்க: 2x – y = 8, 3x + 2y = -2

தீர்வு: 2x – y = 8, 3x + 2y = -2

$\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$

$A X = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$A = \begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} B = \begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix}2 & -1\\3 & 2\end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0$, A^{-1} உள்ளது

adj $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ (adj A) $= \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 2\end{pmatrix}$

$X = A^{-1}B$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}16-2\\-24-4\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}14\\-28\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{14}{7}\\\frac{-28}{7}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow x = 2, y = -4$

பயிற்சி 1.3(3):

ஒருவர் ஒரு குறிப்பிட்ட மாத ஊதியத்தில் ஒரு பணியில் அமர்த்தப்படுகிறார். ஒவ்வொரு ஆண்டும் ஒரு நிலையான ஊதிய உயர்வு அவருக்கு வழங்கப்படுகிறது. 3 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவர் பெறும் ஊதியம்₹19,800 மற்றும் 9 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவர் பெறும் ஊதியம் ₹23,400 எனில் அவருடைய ஆரம்ப ஊதியம் மற்றும் ஆண்டு உயர்வு எவ்வளவு என்பதைக் காண்க. (நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் இக்கணக்கைத் தீர்க்க.)

தீர்வு:

அவருடைய ஆரம்ப ஊதியம் ₹ x மற்றும் ஆண்டு உயர்வு ₹ y

கொடுக்கப்பட்டது: x + 3y = 19800 மற்றும் x + 9y = 23400

$\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19800\\23400\end{pmatrix}$

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ மற்றும் $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ (adj A)

$|A| = \begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 9\end{vmatrix} = 9 - 3 = 6 \neq 0$, A^{-1} உள்ளது

adj $A = \begin{pmatrix}9 & -3\\-1 & 1\end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}9 & -3\\-1 & 1\end{pmatrix}$

$X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}9 & -3\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19800\\23400\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}178200 - 70200\\-19800 + 23400\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}108000\\3600\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}108000/6\\3600/6\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}18000\\600\end{pmatrix}$

ஆரம்ப ஊதியம் x = ₹ 18000,

ஆண்டு உயர்வு= ₹ 600

பயிற்சி 1.3(4):

4 ஆடவரும் 4 மகளிரும் சேர்ந்து ஒரு குறிப்பிட்ட வேலையை 3 நாட்களில் செய்து முடிப்பார்கள். அதே வேலையை 2 ஆடவரும் 5 மகளிரும் சேர்ந்து 4 நாட்களில் முடிப்பார்கள் எனில் அவ்வேலையை ஓர் ஆடவர் மற்றும் ஒரு மகளிர் தனித்தனியாக செய்து முடிப்பதற்கு எத்தனை நாட்களாகும்?

தீர்வு:

ஒரு நபர் வேலையை x நாட்களில் முடிக்கட்டும்

ஒரு பெண் வேலையை y நாட்களில் முடிக்கட்டும்

ஆண் ஒரு நாள் வேலை = $\frac{1}{x}$,

பெண் ஒரு நாள் வேலை = $\frac{1}{y}$

கொடுக்கப்பட்டது:

$4\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{3}$, $2\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{4}$

$\begin{pmatrix}4 & 4\\2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{x}\\\frac{1}{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix} \Rightarrow A X = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$A = \begin{pmatrix}4 & 4\\2 & 5\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix}\frac{1}{x}\\\frac{1}{y}\end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix}4 & 4\\2 & 5\end{vmatrix} = 20 - 8 = 12 \neq 0$, A^{-1} உள்ளது

adj $A = \begin{pmatrix}5 & -4\\-2 & 4\end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}5 & -4\\-2 & 4\end{pmatrix}$

$X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}5 & -4\\-2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}\frac{5}{3}+\frac{-4}{4}\\\frac{-2}{3}+\frac{4}{4}\end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}\frac{20-12}{12}\\\frac{-8+12}{12}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\frac{1}{x}\\\frac{1}{y}\end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}\frac{8}{12}\\\frac{4}{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{8}{144}\\\frac{4}{144}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{18}\\\frac{1}{36}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\frac{1}{x}\\\frac{1}{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{18}\\\frac{1}{36}\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{18} \Rightarrow x = 18$ மற்றும் $\frac{1}{y} = \frac{1}{36}$

$\Rightarrow y = 36$

ஒரு நபர் 18 நாட்களில் வேலையை முடிக்க முடியும்

ஒரு பெண் 36 நாட்களில் வேலையை முடிக்க முடியும்

பயிற்சி 1.4(1)(i):

5x – 2y + 16 = 0, x + 3y – 7 = 0 என்ற நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு:

5x – 2y + 16 = 0, x + 3y – 7 = 0

5x – 2y = - 16 , x + 3y = 7

$\Delta = \begin{vmatrix}5 & -2\\1 & 3\end{vmatrix} = 15 + 2 = 17$

$\Delta_x = \begin{vmatrix}-16 & -2\\7 & 3\end{vmatrix} = -48 + 14 = -34$

$\Delta_y = \begin{vmatrix}5 & -16\\1 & 7\end{vmatrix} = 35 + 16 = 51$

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-34}{17} = -2$, x =-2

$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{51}{17} = 3$, y = 3

பயிற்சி 1.4(1)(ii): $\frac{3}{x}+2y=12$, $\frac{2}{x}+3y=13$ **என்ற நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.**

தீர்வு:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9-4 = 5$

$\Delta_{\frac{1}{x}} = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 36 - 26 = 10$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 39 - 24 = 15$

$\frac{1}{x} = \frac{10}{5} = 2$, $y = \frac{15}{5} = 3$

$x = \frac{1}{2}$, $y = 3$

பயிற்சி 1.4(2):

ஒரு போட்டித் தேர்வில் ஒவ்வொரு சரியான விடைக்கும் ஒரு மதிப்பெண் வழங்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு தவறான விடைக்கும் 1/4 மதிப்பெண் குறைக்கப்படுகிறது. ஒரு மாணவர் 100 கேள்விகளுக்குப் பதிலளித்து 80 மதிப்பெண்கள் பெறுகிறார் எனில் அவர் எத்தனை கேள்விகளுக்குச் சரியாக பதில் அளித்திருப்பார்? (கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி இக்கணக்கைத் தீர்க்கவும்).

தீர்வு:

சரியாகப் பதிலளித்த கேள்விகளின் எண்ணிக்கை x ஆக இருக்கட்டும்

தவறாகப் பதிலளித்த கேள்வியின் எண்ணிக்கை y ஆக இருக்கட்டும்

கொடுக்கப்பட்டது : சரியான பதிலுக்கு 1 மதிப்பெண், தவறான பதில் $-\frac{1}{4}$ மதிப்பெண்

$x + y = 100$; $x - \frac{1}{4}y = 80 \Rightarrow 4x - y = 320$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 100 & 1 \\ 320 & -1 \end{vmatrix} = -100-320 = -420$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 100 \\ 4 & 320 \end{vmatrix} = 320 - 400 = -80$

$X = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-420}{-5} = 84$,

சரியாகப் பதிலளித்த கேள்விகளின் எண்ணிக்கை = 84

$Y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-80}{-5} = 16$.

தவறாகப் பதிலளித்த கேள்வியின் எண்ணிக்கை= 16

பயிற்சி 1.4(3):

வேதியாளர் ஒருவரிடம் 50% அமிலத்தன்மை கொண்ட ஒரு கரைசலும் மற்றும் 25% அமிலத்தன்மை கொண்ட மற்றொரு கரைசலும் உள்ளது. அவர் 10 லிட்டர் கரைசலில் 40% அமிலத்தன்மை உள்ளவாறு ஒரு கரைசலை உருவாக்க இருவகைக் கரைசல்கள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் எத்தனை லிட்டர் சேர்க்க வேண்டும்? (இக்கணக்கை கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க).

தீர்வு:

50% அமிலம் x லிட்டராகவும், 25% அமிலம் y லிட்டராகவும் இருக்கட்டும்

கொடுக்கப்பட்டது: $x + y = 10$

$\frac{50}{100}x + \frac{25}{100}y = \frac{40}{100}(10) \Rightarrow 10x + 5y = 80$

$x + y = 10$; $10x + 5y = 80$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 10 = -5$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 80 & 5 \end{vmatrix} = 50 - 80 = -30$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 80 \end{vmatrix} = 80 - 100 = -20$

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-30}{-5} = 6$, 50% அமிலம் 6 லிட்டர் கலக்க வேண்டும்

$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-20}{-5} = 4$, 25% அமிலம் 4 லிட்டர் கலக்க வேண்டும்

பயிற்சி 1.4(4):

ஒரு மீன் தொட்டியை பம்பு A மற்றும் பம்பு B என்பன ஒன்றாகச் சேர்ந்து 10 நிமிடங்களில் நீரை நிரப்பும். பம்பு B ஆனது நீரை உள்ளே அல்லது வெளியே ஒரே வேகத்தில் அனுப்ப இயலும். எதிர்பாராதவிதமாக பம்பு B ஆனது நீரை வெளியே அனுப்பினால் தொட்டி நிரம்ப 30 நிமிடங்கள் ஆகும் எனில் ஒவ்வொரு பம்பும் தொட்டியை தனித்தனியாக நிரப்ப எவ்வளவு காலம் எடுத்துக் கொள்ளும்? (கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்க்கவும்).

தீர்வு:

பம்பு A மற்றும் பம்பு B ஆகியவை x மற்றும் y நிமிடங்களில் தொட்டியை நிரப்பட்டும்.

பம்பு A மற்றும் பம்பு B மூலம் 1 நிமிடத்தில் நிரப்பப்பட்ட நீர் முறையே $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ ஆகும்

கொடுக்கப்பட்டது: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$ மற்றும் $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{30}$

$\Rightarrow \frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1$ and $\frac{30}{x} - \frac{30}{y} = 1$

$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 30 & -30 \end{vmatrix} = -300 - 300 = -600$

$\Delta_{\frac{1}{x}} = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & -30 \end{vmatrix} = -30 - 10 = -40$

$\Delta_{\frac{1}{y}} = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 30 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 30 = -20$

$\frac{1}{x} = \frac{-40}{-600} = \frac{1}{15}$,

பம்பு A 15 நிமிடங்களில் தொட்டியை நிரப்புகிறது

$\frac{1}{y} = \frac{-20}{-600} = \frac{1}{30}$,

பம்பு B 30 நிமிடங்களில் தொட்டியை நிரப்புகிறது

பயிற்சி 1.6(1)(iii):

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதா என்பதை ஆராய்க. ஒருங்கமைவு உடையதாயின் அவற்றைத் தீர்க்க.

2x + 2y + z = 5, x – y + z = 1, 3x + y + 2z = 4

தீர்வு:

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\1 & -1 & 1\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}$$

A X = B

$$[A|B] = \begin{bmatrix}2 & 2 & 1 & 5\\1 & -1 & 1 & 1\\3 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\2 & 2 & 1 & 5\\3 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\0 & 4 & -1 & 3\\0 & 4 & -1 & 1\end{bmatrix} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 ;\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\0 & 4 & -1 & 3\\0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix} R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$\rho([A|B]) = 3$, $\rho(A) = 2$

$\rho([A|B]) \neq \rho(A)$ ஒருங்கமைவு அற்றது தீர்வுகள் இல்லை

பயிற்சி 1.7(1)(ii):

பின்வரும் சமப்படித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.

2x + 3y – z = 0, x – y – 2z = 0, 3x + y + 3z = 0

தீர்வு:

2x + 3y – z = 0, x – y – 2z = 0, 3x + y + 3z = 0

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\1 & -1 & -2\\3 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

A X = O

$$[A|O] = \begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\1 & -1 & -2 & 0\\3 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & 0\\2 & 3 & -1 & 0\\3 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & 0\\0 & 5 & 3 & 0\\0 & 4 & 9 & 0\end{bmatrix} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 ;\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & 0\\0 & 20 & 12 & 0\\0 & 20 & 45 & 0\end{bmatrix} R_2 \rightarrow 4R_2 ;\ R_3 \rightarrow 5R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & 0\\0 & 20 & 12 & 0\\0 & 0 & 33 & 0\end{bmatrix} R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$\Rightarrow$ $\rho([A|O]) = 3$, $\rho(A) = 3$

$\Rightarrow$ $\rho([A|O]) = \rho(A) = 3$

$\Rightarrow$ ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்

வெளிப்படை தீர்வாக அமையும்

$\Rightarrow$ x = 0, y = 0, z = 0

பயிற்சி 1.1 (15): $\begin{bmatrix}-1 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}$ **என்ற அணியை பிந்தையப் பெருக்கல் சங்கேத ழியாக்க அணியாகக் கொண்டு [2 -3][20 4] என்று பெறப்பட்டச் செய்தியை** $\begin{bmatrix}-1 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}$ **-ன் நேர்மாறு அணியின் பிந்தையப் பெருக்கற் சாவியாகக் கொண்டு சங்கேத மொழி மாற்றம் செய்க . இங்கு ஆங்கில எழுத்துகள் A-Z -க்கு முறையே எண்கள் 1-26 ஐயும், காலியிடத்திற்கு எண் 0 ஐயும் பொருத்தி சங்கேத மொழியாக்கம் மற்றும் மொழி மாற்றம் .**

தீர்வு:

சங்கேத மொழியாக்குதலுக்கான $A = \begin{bmatrix}-1 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix}-1 & -1\\2 & 1\end{vmatrix} = -1 + 2 = 1$ & $\text{adj } A = \begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & -1\end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & -1\end{pmatrix}$

சங்கேத மொழியாக்கப்பட்ட நிரை அணி	சங்கேத மொழிமாற்றம் செய்யப்பட்ட நிரை (BA^{-1})
$(2 \quad -3)$	$(2 \quad -3)\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & -1\end{pmatrix}$ = (2+6 2+3) =(8 5)
$(20 \quad 4)$	$(20 \quad 4)\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & -1\end{pmatrix} = (20-8 \quad 20-4) = (12 \quad 16)$

சங்கேத மொழி மாற்றம் செய்யப்பட்ட நிரை அணிகளின் வரிசை பின்வருமாறு

[8 5 12 16]

8	5	12	16
H	E	L	P

அத்தியாயம் -2 கலப்பு எண்கள்
2 , 3 மற்றும் 5 - மதிப்பெண்கள்

2 மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 2.1

(i) $\mathbf{i^{1947} + i^{1950}}$ $\qquad 1947 = 1944 + 3$

$= i^{1944} \cdot i^3 + i^{1948} \cdot i^2 \qquad 1950 = 1948 + 2$

$= i^3 + i^2 = -i - 1 \qquad i^{1944} = 1$

$= -1 - i \qquad i^{1948} = 1$

2. $\mathbf{i^{1948} - i^{-1869}}$ $\qquad 1948 = 4$ இன் பெருக்கல்

$= i^{1948} - \frac{1}{i^{1869}} \qquad 1869 = 1868 + 1$

$= 1 - \frac{1}{i^{1869}} = 1 - \frac{1}{i^{1868+1}} = 1 - \frac{1}{i^{1868} \cdot i^1}$

$= 1 - \frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = 1 - \frac{i}{i^2}$

$= 1 - (-i) = 1 + i$

3. $\sum_{n=1}^{12} i^{12} = [i^1 + i^2 + i^3 + i^4] + [i^5 + i^6 + i^7 + i^8] + [i^9 + i^{10} + i^{11} + i^{12}]$

$= 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

4. $i^{59} + \frac{1}{i^{59}} \quad = i^{56} \cdot i^3 + \frac{1}{i^{56} i^3} \qquad \left(\because \frac{1}{i^3} = i\right)$

$= -i + \frac{1}{1 \cdot (i)^3} = -i + i = 0$

5. $i \cdot i^2 \cdot i^3 \ldots i^{2000} = i^{1+2+3+\cdots+2000} \qquad \sum n = \frac{n(n+1)}{2}$

$= i^{\frac{2000(2000+1)}{2}} = i^{1000 \times 2001}$

$= 1 \qquad$ [$\because i^{(4 \text{ இன் பெருக்கல்})} = 1.$]

6. $\sum_{n=1}^{10} i^{n+50} \qquad i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$

$= (i^{51} + i^{52} + i^{53} + i^{54}) + (i^{55} + i^{56} + i^{57} + i^{58}) + (i^{59} + i^{60})$

$= 0 + 0 + i^{56} \cdot i^3 + 1$

$= -i + 1 = 1 - i$

பயிற்சி 2.2

(1) $z = 5 - 2i \qquad w = -1 + 3i$

(i) $z + w = 5 - 2i + (-1 + 3i) = 5 - 2i - 1 + 3i = 4 + i$

(ii) $z - iw = 5 - 2i - i(-1 + 3i) = 5 - 2i + i - 3i^2$

$= 5 - i - 3(-1) = 5 - i + 3 = 8 - i$

(iii) $2z + 3w = 2(5 - 2i) + 3(-1 + 3i) = 10 - 4i - 3 + 9i$

$= 7 + 5i$

(iv) $zw = (5 - 2i)(-1 + 3i) = -5 + 15i + 2i - 6i^2$

$= -5 + 17i + 6 = 1 + 17i$

(v) $z^2 + 2zw + w^2 = (z + w)^2 = (4 + i)^2$

$= 4^2 + 2(4)i + i^2 = 16 + 8i - 1 = 15 + 8i$

(vi) $(z + w)^2 = (4 + i)^2 = 16 + 8i - 1 = 15 + 8i$

பயிற்சி 2.3

1. $\mathbf{z_1 = 1 - 3i}$, $\mathbf{z_2 = -4i}$ மற்றும் $\mathbf{z_3 = 5}$ எனில் கீழ்க்காண்பவைகளை நிறுவுக.

(i)$(\mathbf{z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)}$ (ii)$\mathbf{(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)}$.

(i) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

$(z_1 + z_2) + z_3$

$= [1 - 3i + (-4i)] + 5 = (1 - 3i - 4i) + 5$

$= 1 - 7i + 5 = 6 - 7i \qquad - (1)$

$z_1 + (z_2 + z_3)$

$= 1 - 3i + (-4i + 5)$

$= 1 - 3i - 4i + 5$

$= 6 - 7i \qquad - (2)$

(1) = (2) $\quad \therefore (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

(ii) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

$z_1 z_2 = (1 - 3i)(-4i) = -4i + 12i^2 = -4i - 12$

$(z_1 z_2) z_3 = (-12 - 4i)5 = -60 - 20i \qquad - (3)$

$z_2 z_3 = (-4i)5 = -20i$

$z_1 (z_2 z_3) = (1 - 3i)(-20i) = -20i + 60i^2$

$= -60 - 20i \qquad - (4)$

(3) = (4) $\quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

பயிற்சி 2.4

1. கீழ்க்காண்பவற்றை செவ்வக வடிவில் எழுதுக:

(1) $\overline{(5 + 9i) + (2 - 4i)}$

$= \overline{5 + 9i} + \overline{2 - 4i} = 5 - 9i + 2 + 4i = 7 - 5i$

(ii) $\frac{10-5i}{6+2i} = \frac{10-5i}{6+2i} \times \frac{6-2i}{6-2i} = \frac{60-20i-30i+10i^2}{6^2+2^2}$

$= \frac{60-50i-10}{36+4} = \frac{50-50i}{40} = \frac{10(5-5i)}{40} = \frac{5}{4} - \frac{5i}{4} = \frac{5(1-i)}{4}$

(iii) $3\bar{i} + \frac{1}{2-i} = -3i + \frac{1}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = -3i + \frac{2+i}{2^2+1^2}$

$= -3i + \frac{2+i}{5} = \frac{-15i+2+i}{5}$

$= \frac{2-14i}{5} = \frac{2}{5}(1 - 7i)$

2. z= x+ iy எனில், கீழ்காண்பவைகளின் செவ்வக வடிவினைக் காண்க.

(i) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \qquad z = x + iy$

$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \therefore \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$

(ii) $\mathrm{Re}(i\bar{z})$

$z = x + iy \qquad i\bar{z} = i(x - iy)$

$\therefore \bar{z} = x - iy \qquad = ix - i^2 y = y + ix$

$\therefore \mathrm{Re}(i\bar{z}) = y$

(iii) $\mathrm{Im}(3z + 4\bar{z} - 4i)$

$3z + 4\bar{z} - 4i = 3(x + iy) + 4(x - iy) - 4i$

$= 3x + i3y + 4x - i4y - 4i$

$= (3x + 4x) + i(3y - 4y - 4)$

$= 7x + i(-y - 4)$

$\mathrm{Im}(3z + 4\bar{z} - 4i) = -y - 4$

3. $z_1 = 2 - i$ **மற்றும்** $z_2 = -4 + 3i$ **எனில்** $z_1 z_2$ **மற் றும்** $\frac{z_1}{z_2}$ **-ன் நேர்மாறைக் காண்க.**

<u>தீர்வு :</u>

$z_1 z_2 = (2 - i)(-4 + 3i) = -8 + 6i + 4i - 3i^2$

$= -8 + 10i + 3 = -5 + 10i$

$(z_1 z_2)^{-1} = \frac{-5}{(-5)^2 + 10^2} + i\frac{-10}{(-5)^2 + 10^2} = \frac{-5-10i}{25+100} = \frac{-5(1+2i)}{125}$

$= \frac{1}{25}(-1 - 2i)$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{-4+3i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+1} = \frac{-8-4i+6i+3i^2}{2^2+1^2}$

$= \frac{-8+2i-3}{4+1} = \frac{1}{5}(-11 + 2i)$

<u>பயிற்சி 2.5</u>

1.(i) $\left|\frac{2i}{3+4i}\right| = \frac{|2i|}{|3+4i|} = \frac{|2||i|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{2(1)}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

(ii) $\left|\frac{2-i}{1+i} + \frac{1-2i}{1-i}\right| = \left|\frac{(2-i)(1-i)+(1-2i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}\right|$

$= \left|\frac{2-2i-i+i^2+1+i-2i-2i^2}{1^2+1^2}\right| = \left|\frac{2-3i-1+1-i+2}{1+1}\right| = \left|\frac{4-4i}{2}\right|$

$= \frac{\sqrt{4^2+(-4)^2}}{2} \quad = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

<u>பயிற்சி 2.6</u>

(3) பின்வரும் சமன்பாடுகளில் $z = x + iy$ **-ன் நியமப்பாதையை கார்ட்டீசியன் வடிவில் காண்க.**

(i) $[\mathbf{Re}\ (\mathbf{iz})]^2 = 3$

<u>தீர்வு :</u>

$z = x + iy$

$iz = i(x + iy) = ix + i^2y \quad = -y + ix$

$\mathrm{Re}\ (iz) = -y$

$[\mathrm{Re}(iz)]^2 = (-y)^2 = y^2$

$\therefore [\mathrm{Re}(iz)]^2 = 3 \Rightarrow y^2 = 3$

(ii) $\mathbf{Im}\ [(\mathbf{1 - i})\mathbf{z} + \mathbf{1}] = \mathbf{0}$.

தீர்வு : $z = x + iy$

$(1 - i)z + 1 = (1 - i)(x + iy) + 1$

$= x + iy - ix - i^2y + 1 = x + iy - ix + y + 1$

$= (x + y + 1) + i(y - x)$

$\mathrm{Im}\ [(1 - i)z + 1] = 0 \Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow x = y$

(iii) $|\mathbf{z + i}| = |\mathbf{z - 1}|$

$z = x + iy\ ;\ |x + iy + i| = |x + iy - 1|$

$|x + i(y + 1)| = |x - 1 + iy|$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

$\Rightarrow x^2 + (y + 1)^2 = (x - 1)^2 + y^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2$

$\Rightarrow 2x + 2y = 0$

$\Rightarrow x + y = 0$

நியமப்பாதை → $x + y = 0$

(iv) $\bar{z} = z^{-1} = \frac{1}{z}$

$\Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |x + iy|^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

---

(4) பின்வரும் சமன்பாடுகள் வட்டத்தை குறிக்கிறது என காட்டுக. மேலும் இதன் மையம் மற்றும் ஆரத்தைக் காண்க.

(i) $|z - 2 - i| = 3 \Rightarrow |z - (2 + i)| = 3$

இது $|z - z_0| = a$ வடிவத்தில் உள்ளது

∴ இது வட்டத்தின் சமன்பாட்டைபிரதிபலிக்கிறது

மையம் $z_0 = 2 + i$ அதாவது $(2,1)$ $a = 3$

(ii) $|2z + 2 - 4i| = 2$

$\div 2 \quad |z + 1 - 2i| = 1 \Rightarrow |z - (-1 + 2i)| = 1$

இது $|z - z_0| = a$ வடிவத்தில் உள்ளது

∴ இது வட்டத்தின் சமன்பாட்டைபிரதிபலிக்கிறது

மையம் $z_0 = -1 + 2i$ அதாவது $(-1,2)$ $a = 1$

(iii) $|3z - 6 + 12i| = 8$

$\div 3 \quad |z - 2 + 4i| = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow |z - (+2 - 4i)| = \frac{8}{3}$

இது $|z - z_0| = a$ வடிவத்தில் உள்ளது

∴ இது வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் குறிக்கிறது.

மையம் $z_0 = 2 - 4i$ அதாவது $(2, -4)$ $a = \frac{8}{3}$

---

5. பின்வரும் சமன்பாடுகளில் $z = x + iy$ **-ன் நியமப்பாதையை கார்டீசியன் வடிவில் காண்க.**

(i) $|\mathbf{z - 4}| = \mathbf{16} \qquad \mathbf{z = x + iy}$

$|x + iy - 4| = 16 \Rightarrow |x - 4 + iy| = 16$

$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 16$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 16^2 = 256$

$x^2 + y^2 - 8x + 16 - 256 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 240 = 0$

(ii) $|\mathbf{z - 4}|^2 - |\mathbf{z - 1}|^2 = \mathbf{16} \qquad \mathbf{z = x + iy}$

$|x + iy - 4|^2 - |x + iy - 1|^2 = 16$

$|(x - 4) + iy|^2 - |(x - 1) + iy|^2 = 16$

$\left[\sqrt{(x-4)^2 + y^2}\right]^2 - \left[\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right]^2 = 16$

$(x - 4)^2 + y^2 - [(x - 1)^2 + y^2] = 16$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 - (x^2 - 2x + 1 + y^2) = 16$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 - x^2 + 2x - 1 - y^2 = 16$

$-8x + 16 + 2x - 1 - 16 = 0$

$-6x - 1 = 0 \Rightarrow \ -6x = 1$

நியமப்பாதை → $x = \frac{-1}{6}$ அல்லது $6x + 1 = 0$

பயிற்சி 2.7

1. கீழ்காணும் கலப்பெண்களின் வடிவினைக் காண்க.

(i) $\mathbf{2 + i\,2\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ $\quad \mathbf{a = 2} \quad \mathbf{b = 2\sqrt{3}}$

$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{3}}{2}\right| = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

$2 + 12\sqrt{3}$ என்ற கலப்பெண் முதலாம் கால் பகுதியில் அமைவதால் [x, y இரண்டும் மிகை] அதன் முதன்மை வீச்சு

$\therefore \theta = \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\therefore 2 + i2\sqrt{3} = 4\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

அதன் துருவ வடிவம்

$\mathbf{2 + i2\sqrt{3} = 4\left[\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right.} \quad \mathbf{k \in z}$

(ii) $\mathbf{3 - i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

$a = 3 \quad b = -\sqrt{3}$

$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \tan^{-1}\left|-\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \tan^{-1}\left|-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\right|$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$3 - i\sqrt{3}$ என்ற கலப்பெண் நான்காம் கால்பகுதியில் அமைவதால், [$\because x \to +$ ve, $y \to -$ ve]

$\theta = -\alpha = -\frac{\pi}{6}$

$3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$\mathbf{3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] \; k \in z}$

(iii) $\mathbf{-2 - i2 = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

$a = -2 \quad b = -2$

$r = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \tan\left|\frac{-2}{-2}\right| = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

-2 – 2i கலப்பெண் 3-ம் கால்பகுதியில் அமைவதால் [x குறை y குறை]

அதன் முதன்மை வீச்சு

$\theta = -\pi + \alpha = -\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{-4\pi+\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4}$

$-2 - i2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$-2 - i2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}\right)\right]$, $k \in z$

பயிற்சி 2.8 (1). $\boldsymbol{\omega \neq 1}$ **என்பது ஒன்றின் மூன்றாம் படிமூலம் எனில்** $\frac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2} + \frac{a+b\omega+c\omega^2}{c+a\omega+b\omega^2} = -1$ **என நிறுவுக.**

தீர்வு :

L.H.S= $\frac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2} \times \frac{\omega}{\omega} + \frac{a+b\omega+c\omega^2}{c+a\omega+b\omega^2} \times \frac{\omega^2}{\omega^2}$

$= \frac{(a+b\omega+c\omega^2)\omega}{b\omega+c\omega^2+a\omega^3} + \frac{a+b\omega+c\omega^2}{c\omega^2+a\omega^3+b\omega^2} \times \omega^2$

$\mathbf{= \frac{(a+b\omega+c\omega^2)\omega}{a+b\omega+c\omega^2} + \frac{a+b\omega+c\omega^2}{c\omega^2+a+b\omega} \times \omega^2 \quad = \omega + \omega^2 = -1}$

---

3 மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 2.7

2. $\mathbf{z = 2 + 3i}$ **எனக்கொண்டு கீழ்க்காணும் கலப்பெண்களை ஆர்கண்ட் தளத்தில் குறிக்க.**

(i) z , iz , மற்றும் z+iz (ii) z , –iz , மற்றும் z –iz .

தீர்வு :

(i) $z, iz, z + iz$

$z = 2 + 3i$

$iz = i(2+3i) = 2i + 3i^2 = 2i + 3(-1) = -3 + 2i$

$z + iz = 2 + 3i - 3 + 2i = -1 + 5i$

(ii) $z = 2 + 3i \qquad z, -iz, z - iz$

$z = 2 + 3i$

$-iz = -i(2+3i) = -2i - 3i^2 = -2i + 3 = 3 - 2i$

$z - iz = z + (-iz) = 2 + 3i + 3 - 2i = 5 + i$

---

3. $\mathbf{(3-i)x - (2-i)y + 2i + 5}$ **மற்றும்** $\mathbf{2x + (-1 + 2i)y + 3 + 2i}$ **ஆகிய கலப்பெண்கள் சமம் எனில் x மற்றும் y - ன் மதிப்புகளைக் காண்க.**

தீர்வு : $3x - ix - 2y + yi + 2i + 5 = 2x - y + i2y + 3 + 2i$

$(3x - 2y + 5) + i(-x + y + 2) = (2x - y + 3) + i(2y + 2)$

இருபுறமும் மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை ஒப்பிட கிடைப்பது

3x – 2y + 5 = 2x – y + 3 ⇒ 3x – 2y + 5 – 2x + y – 3 = 0

⇒ x – y + 2 = 0 .... (1)

⇒ -x + y + 2 = 2y + 2 ⇒ -x + y + 2 – 2y – 2 = 0

⇒ – x – y = 0 ⇒ x + y = 0 ..... (2)

(1) – (2) கிடைப்பது,

⇒ – 2y = -2 ⇒ y = 1

y= 1 என (2) ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

x + 1 = 0 ⇒ x = -1

∴ x = – 1 மற்றும் y = 1

பயிற்சி 2.3

1. $\mathbf{z_1 = 1 - 3i}$, $\mathbf{z_2 = -4i}$, $\mathbf{z_3 = 5}$

(i) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

L.H.S = $(z_1 + z_2) + z_3$

$= [1 - 3i + (-4i)] + 5 = (1 - 3i - 4i) + 5$

$= 1 - 7i + 5 = 6 - 7i$ - (1)

R.H.S = $z_1 + (z_2 + z_3)$

$= 1 - 3i + (-4i + 5) = 1 - 3i - 4i + 5$

$= 6 - 7i$ - (2)

(1) = (2) LHS = RHS

$\therefore (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

(ii) $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

L.H.S : $z_1z_2 = (1 - 3i)(-4i) = -4i + 12i^2 = -4i - 12$

$(z_1z_2)z_3 = (-12 - 4i)5 = -60 - 20i$ - (3)

R.H.S : $z_2z_3 = (-4i)5 = -20i$

$z_1(z_2z_3) = (1 - 3i)(-20i) = -20i + 60i^2$

$= -60 - 20i$ - (4)

(3) = (4) $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

(2) $z_1 = 3 \quad z_2 = -7i \quad z_3 = 5 + 4i$

(i) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

L.H.S : $z_2 + z_3 = -7i + 5 + 4i = 5 - 3i$

$z_1(z_2 + z_3) = 3(5 - 3i) = 15 - 9i$ - (1)

R.H.S : $z_1z_2 = 3(-7i) = -21i$

$z_1z_3 = 3(5 + 4i) = 15 + 12i$

$z_1z_2 + z_1z_3 = -21i + 15 + 12i$

$= 15 - 9i$ - (2)

(1) = (2) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

(ii) $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$

L.H.S : $z_1 + z_2 = 3 + (-7i) = 3 - 7i$

$(z_1 + z_2)z_3 = (3 - 7i)(5 + 4i)$

$= 15 + 12i - 35i - 28i^2$

$= 15 - 23i + 28 = 43 - 23i$ - (3)

R.H.S : $z_1z_3 = 3(5 + 4i) = 15 + 12i$

$z_2z_3 = -7i(5 + 4i) = -35i - 28i^2 = 28 - 35i$

$z_1z_3 + z_2z_3 = 15 + 12i + 28 - 35i = 43 - 23i$ - (4)

(3) = (4) $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$

(3) கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் நேர்மாறுகளைக் காண்க.

$z = a + ib \qquad z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$

(i) $z_1 = 2 + 5i$ a = 2 & b = 5

கூட்டல் நேர்மாறு $-z_1 = -2 - 5i$

பெருக்கல் நேர்மாறு: $z_1^{-1} = \frac{2}{2^2+5^2} + i\frac{-5}{2^2+5^2} = \frac{2}{29} - \frac{5i}{29}$

(ii) $z_2 = -3 - 4i$ a = -3 & b = -4

கூட்டல் நேர்மாறு : $-z_2 = -(-3 - 4i) = 3 + 4i$

பெருக்கல் நேர்மாறு:

$z_1^{-1} = \frac{-3}{(-3)^2+(-4)^2} + i\frac{-(-4)}{(-3)^2+(-4)^2} = \frac{-3}{25} + \frac{4i}{25}$

(ii) $z_3 = 1 + i$

கூட்டல் நேர்மாறு : $-z_3 = -(1 + i) = -1 - i$

பெருக்கல் நேர்மாறு $z_3^{-1} = \frac{1}{1^2+1^2} + i\frac{(-1)}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

பயிற்சி 2.4

4. u = ? $\quad v = 3 - 4i \quad w = 4 + 3i$ & $\frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$

$\frac{1}{v} = \frac{1}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{3+4i}{3^2+4^2} = \frac{3+4i}{25}$

$\frac{1}{w} = \frac{1}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{4-3i}{4^2+3^2} = \frac{4-3i}{25}$

$\frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{3+4i}{25} + \frac{4-3i}{25} = \frac{7+i}{25}$

$\frac{1}{u} = \frac{7+i}{25}$

$u = \frac{1}{\frac{7+i}{25}} = \frac{25}{7+i} \times \frac{7-i}{7-i} = \frac{25(7-i)}{7^2+1^2} = \frac{25(7-i)}{50} = \frac{1}{2}(7 - i)$

5. $z = \bar{z}$ $\qquad$ $z = a + ib$

$\Leftrightarrow x + iy = \overline{x + iy}$ $\qquad$ $\bar{z} = a - ib$

$\Leftrightarrow x + iy = x - iy$ $\qquad$ $z + \bar{z} = 2a$

$\Leftrightarrow 2iy = x - x$ $\qquad$ $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

$\Leftrightarrow 2iy = 0$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$\Leftrightarrow y = 0$ $\qquad$ $z - \bar{z} = 2ib$

$\Leftrightarrow z = x$ $\qquad$ $z - \bar{z} = 2i\ \mathrm{im}(z)$

$\Leftrightarrow$ z - இது மெய். $\qquad$ $\mathrm{im}\,(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

6. $(\sqrt{3} + i)^n$ ஆனது n -ன் எந்த மீச்சிறு மிகை முழு எண் மதிப்புகளுக்கு (i) மெய்
(ii) முழுவதும் கற்பனை எண்களாக இருக்கும்?

(i) $(\sqrt{3} + i)^1 = \sqrt{3} + i$

(ii) $(\sqrt{3} + i)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}i + i^2$

$= 3 + 2\sqrt{3}i - 1 = 2 + 2\sqrt{3}i$

(iii) $(\sqrt{3} + i)^3 = (\sqrt{3} + i)^2(\sqrt{3} + i)$

$= (2 + 2\sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i)$

$= 2\sqrt{3} + 2i + 6i + 2\sqrt{3}i^2$

$= 2\sqrt{3} + 8i - 2\sqrt{3}$

$= 8i$ முழுவதும் கற்பனை

(iv) $(\sqrt{3} + i)^4 = (\sqrt{3} + i)^3(\sqrt{3} + i) = 8i(\sqrt{3} + i)$

$= 8\sqrt{3}i + 8i^2 = -8 + 8\sqrt{3}i$

(v) $(\sqrt{3} + i)^5 = (\sqrt{3} + i)^3(\sqrt{3} + i)^2$

$= 8i(2 + 2\sqrt{3}i) = 16i + 16\sqrt{3}i^2$

(vi) $(\sqrt{3} + i)^6 = (\sqrt{3} + i)^3(\sqrt{3} + i)^3 = 8i(8i) = 64i^2$

$= -64$ என்பது மெய்

n = 6 $(\sqrt{3} + i)^n$ என்பது மெய்

n = 3 $(\sqrt{3} + i)^n$ என்பது கற்பனை எண்

7. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

(i) $(2 + i\sqrt{3})^{10} - (2 - i\sqrt{3})^{10}$ என்பது முழுவதும் கற்பனை

தீர்வு :

$z = (2 + i\sqrt{3})^{10} - (2 - i\sqrt{3})^{10}$

$\bar{z} = \overline{(2 + i\sqrt{3})^{10} - (2 - i\sqrt{3})^{10}}$

$= \overline{(2 + i\sqrt{3})^{10}} - \overline{(2 - i\sqrt{3})^{10}}$

$= \left(\overline{2 + i\sqrt{3}}\right)^{10} - \left(\overline{2 - i\sqrt{3}}\right)^{10}$

$= \left(2 - i\sqrt{3}\right)^{10} - \left(2 + i\sqrt{3}\right)^{10}$

$= -\left[\left(2 + i\sqrt{3}\right)^{10} - \left(2 - i\sqrt{3}\right)^{10}\right]$

$\bar{z} = -z$ $\quad$ ∴ z என்பது கற்பனை எண்

பயிற்சி 2.5

(2) z_1 மற்றும் z_2 என்ற ஏதேனும் இரு கலப்பெண்களுக்கு $|z_1| = |z_2| = 1$ மற்றும் $z_1z_2 \neq -1$ –எனில் $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ஓர் மெய் எண் எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

$|z_1| = 1 \qquad |z_2| = 1$

$|z_1|^2 = 1 \qquad |z_2|^2 = 1$

$z_1\bar{z}_1 = 1 \qquad z_2\bar{z}_2 = 1$

$z_1 = \frac{1}{\bar{z}_1} \qquad z_2 = \frac{1}{\bar{z}_2}$

$z = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} = \frac{\frac{1}{\bar{z}_1}+\frac{1}{\bar{z}_2}}{1+\frac{1}{\bar{z}_1}\cdot\frac{1}{\bar{z}_2}} = \frac{\frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{\bar{z}_1\bar{z}_2}}{\frac{\bar{z}_1\bar{z}_2+1}{\bar{z}_1\bar{z}_2}} = \frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2} = \frac{\overline{z_1+z_2}}{\overline{1+z_1z_2}}$

$= \overline{\left(\frac{z+z_2}{1+z_1z_2}\right)}$ $\qquad z = \bar{z}$ $\qquad$ ∴ z என்பது மெய்

3. $10-8i$, $11+6i$ ஆகிய புள்ளிகளில் எப்புள்ளி 1+ i -க்கு மிக அருகாமையில் இருக்கும்?

<u>தீர்வு :</u>

A , B , C என்பது கலப்பு எண்கள்

$z_1 = 10-8i$, $z_2 = 11+6i$, $z_3 = 1+i$

$AC = |z_1 - z_3| = |10-8i-1-i| = |9-9i|$

$= \sqrt{9^2+(-9)^2} = \sqrt{81+81} = \sqrt{162}$

$BC = |z_2 - z_3| = |11+6i-1-i| = |10+5i|$

$= \sqrt{10^2+5^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125}$

$\sqrt{125} < \sqrt{162}$ $\therefore 11+6i$ ஆகிய புள்ளிகளில் 1+ i -க்கு மிக அருகாமையில் இருக்கும்

---

(4) |z| = 3 எனில் $7 \le |z+6-8i| \le 13$ எனக்காட்டுக.

<u>தீர்வு :</u>

$z_1 = 6-8i$

$|z_1| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

$||z|-|z_1|| \le |z+z_1| \le |z|+|z_1|$

$|3-10| \le |z+6-8i| \le 3+10$

$|-7| \le |z+6-8i| \le 13$

$\Rightarrow 7 \le |z+6-8i| \le 13$

---

(5) |z| =1 எனில் $2 \le |z^2-3| \le 4$ எனக்காட்டுக.

<u>தீர்வு :</u>

$z_1 = -3$ $\therefore |z_1| = |-3| = 3$.

$|z| = 1$ $\Rightarrow |z^2| = |z|^2 = 1^2 = 1.$

$||z|^2 - |z_1|| \le |z^2+(-3)| \le |z|^2 + |z_1|$

$|1^2-3| \le |z^2-3| \le 1+3$

$|-2| \le |z^2-3| \le 4$

$2 \le |z^2-3| \le 4$

---

(8) z, iz , மற்றும் z+iz ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்டு அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு 50 சதுர அலகுகள் எனில், |z| -ன் மதிப்பினைக் காண்க.

<u>தீர்வு :</u>

A ,B ,C கலப்பு எண்களை முறையே z ,iz ,z+iz குறிக்கலாம்.

$AB = |z-iz| = |z(1-i)| = |z||1-i|$

$= |z|\sqrt{1^2+(-1)^2} = |z|\sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,|z|$

$BC = |iz-z-iz| = |-z| = |z|$

$AC = |z-(z+iz)| = |z-z-iz| = |-iz|$

$= |-i||z| = |z|$

$AC = BC$ சமபக்க வலது முக்கோணம்

$(AC)^2 + (BC)^2 = |z|^2 + |z|^2 = 2|z|^2 = AB^2$

$\therefore$ABC இரு சம பக்க செங்கோண முக்கோணம் .

பரப்பு $= \frac{1}{2} BCXAC = 50 \Rightarrow$ $|z||z| = 100$

$|z|^2 = 100$ $\Rightarrow |z| = 10$ $|z| = -10$

சாத்தியம் இல்லை

---

(9) $z^3 + 2\bar{z} = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஐந்து தீர்வுகள் இருக்கும் என நிறுவுக.

<u>தீர்வு :</u>

$z^3 + 2\bar{z} = 0$ - (1)

$z^3 = -2\bar{z}$

$|z|^3 = |-2||\bar{z}| \Rightarrow |z|^3 = 2|z| \Rightarrow |z|^3 - 2|z| = 0$

$|z|(|z|^2 - 2) = 0$

$|z| = 0$ $|z|^2 - 2 = 0$

$z = 0$ $|z|^2 = 2 \Rightarrow z\bar{z} = 2 \Rightarrow \bar{z} = \frac{2}{z}$

(1) பிரதியிட $z^3 + 2\cdot\frac{2}{z} = 0 \Rightarrow z^4 + 4 = 0$

$|z| = 0$ $z^4 + 4 = 0$

$\Rightarrow z = 0$ $z^4 + 4 = 0$

$\therefore$ இது ஐந்து தீர்வுகளைக் கொண்டுள்ளது.

$z = a+ib$ & $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$

---

10 (i) வர்க்கமூலம் காண்க : $4+3i$

$z = 4+3i$ $a = 4$ $b = 3$

$|z| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + \frac{ib}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$

$\sqrt{4+3i} = \pm\left[\sqrt{\frac{5+4}{2}} + i\frac{3}{|3|}\sqrt{\frac{5-4}{2}}\right] = \pm\left(\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{3}\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\right)$

$= \pm\left(\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}i\right) = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

(ii) வர்க்கமூலம் காண்க : $-6+8i$

$z = -6+8i$ $a = -6$ $b = 8$

$|z| = \sqrt{(-6)^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + \frac{ib}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$

$\sqrt{-6+8i} = \pm\left(\sqrt{\frac{10+(-6)}{2}} + i\frac{8}{|8|}\sqrt{\frac{10-(-6)}{2}}\right)$

$= \pm\left(\sqrt{\frac{10-6}{2}} + i\frac{8}{8}\sqrt{\frac{10+6}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{4}{2}} + i\sqrt{\frac{16}{2}}\right)$

$= \pm(\sqrt{2} + i\sqrt{8}) = \pm(\sqrt{2} + i2\sqrt{2})$

(iii) வர்க்கமூலம் காண்க : $-5-12i$

$z = -5-12i$ $a = -5$ $b = -12$

$|z| = \sqrt{(-5)^2+(-12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$

$= \pm\left(\sqrt{\frac{13+(-5)}{2}} + i\left(\frac{-12}{12}\right)\sqrt{\frac{13-(-5)}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{8}{2}} + \left(\frac{-12}{12}\right)i\sqrt{\frac{18}{2}}\right)$

$= \pm(\sqrt{4} - i\sqrt{9}) = \pm(2-i3) = \pm(2-3i)$

குறிப்பு

$z = a + ib$ & $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

பயிற்சி 2.6

(1) $z = x + iy$ என்ற ஏதேனும் ஒரு கலப்பெண் $\left|\frac{z-4i}{z+4i}\right| = 1$ எனுமாறு அமைந்தால் z -ன் நியமப்பாதை மெய் அச்சு எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $z = x + iy$

$\left|\frac{z-4i}{z+4i}\right| = 1$

$\frac{|z-4i|}{|z+4i|} = 1$

$|z-4i| = |z+4i|$

$|x + iy - 4i| = |x + iy + 4i|$

$|x + i(y-4)| = |x + i(y+4)|$

$\sqrt{x^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + (y+4)^2}$

$x^2 + (y-4)^2 = x^2 + (y+4)^2$

$x^2 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 + 8y + 16$

$\Rightarrow -16y = 0$

$y = 0$ x - அச்சின் சமன்பாடு

பயிற்சி 2.7

1. (iv) $\frac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$

$i - 1 = -1 + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$a = -1 \qquad b = 1$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{1}{-1}\right| = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

(-1 + i) என்ற கலப்பெண் II-ம் கால் பகுதியில் அமைவதால் [x → குறை y → மிகை)

அதன் முதன்மை வீச்சு

$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$i - 1 = -1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$

$\frac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{4}}$

$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{9\pi - 4\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi - 4\pi}{12}\right]$

$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right]$

$\frac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(2k\pi + \frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{5\pi}{12}\right)\right]$

(2) பின்வருவனவற்றை செவ்வக வடிவில் எழுதுக.

(i) $\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\frac{\pi}{6}\right]\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$

$= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right)$

$= \cos\left(\frac{2\pi+\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi+\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\frac{\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}}{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi-2\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi-2\pi}{6}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{6}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}(0 - i) \quad = -\frac{1}{2}i$

(3) $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)(x_3 + iy_3)\ldots(x_n + iy_n) = a + ib$ எனில்,

(i) $(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)(x_3^2 + y_3^2)\ldots(x_n^2 + y_n^2) = a^2 + b^2$

(ii) $\sum_{r=1}^{n} \tan^{-1}\left(\frac{y_r}{x_r}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + 2k\pi$, $k \in Z$

எனக்காட்டுக.

தீர்வு : (i) $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)\ldots(x_n + iy_n) = a + ib$

$|(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)\ldots(x_n + iy_n)| = |a + ib|$

$|(x_1 + iy_1)||(x_2 + iy_2)|\ldots|(x_n + iy_n)| = |a + ib|$

$\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\cdots\sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த கிடைப்பது,

$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)\ldots(x_n^2 + y_n^2) = a^2 + b^2$

(ii) $\arg[(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)\ldots(x_n + iy_n)] = \arg(a + ib)$

$\arg(x_1 + iy_1) + \arg(x_2 + iy_2) + \cdots + \arg(x_n + iy_n)$

$= \arg(a + ib)$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y_2}{x_2}\right) + \cdots + \tan^{-1}\left(\frac{y_n}{x_n}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$\therefore \tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y_2}{x_2}\right) + \cdots + \tan^{-1}\left(\frac{y_n}{x_n}\right) = k\pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

பயிற்சி 2.8

2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^5+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^5=-\sqrt{3}$ **எனக்காட்டுக.**

தீர்வு : $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$

$\alpha=\tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|=\tan^{-1}\left|\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|=\tan^{-1}\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=\frac{\pi}{6}$

$\theta=\alpha=\frac{\pi}{6}$ [$\because \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ இரண்டாம் கால்பகுதியில் அமைகிறது]

$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{i2}=1\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{i}{2}\right)^5=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$

இதேபோல் $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{i}{2}\right)^5=\cos\frac{5\pi}{6}-i\sin\frac{5\pi}{6}$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^5+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^5=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}-i\sin\frac{5\pi}{6}$

$=2\cos\frac{5\pi}{6}=2\cos 150°$

$=2\cos(180°-30°)=2[-\cos 30°]=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

---

5. $z^3+27=0$

$z^3=-27 \quad =27\times-1$

$z=(27)^{1/3}(-1)^{1/3}$

$z=(27)^{\frac{1}{3}}[\cos\pi+i\sin\pi]^{\frac{1}{3}}$

$z=3[\cos(2k\pi+\pi)+i\sin(2k\pi+\pi)]^{\frac{1}{3}}$

$=3\left[\cos(2k+1)\frac{\pi}{3}+i\sin(2k+1)\frac{\pi}{3}\right] \quad K=0,1,2$

$=3\,\text{cis}\,(2k+1)\frac{\pi}{3}$

$k=0 \quad z_1=3\,\text{cis}\,\frac{\pi}{3}$

$k=1 \quad z_2=3\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{3}=3\,\text{cis}\pi=-3$

$k=2 \quad z_3=3\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{3}$

---

(5) $\omega\neq 1$ **என்பது ஒன்றின் முப்படி மூலம் எனில்** $(z-1)^3+8=0$ **என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள்** $-1, 1-2\omega, 1-2\omega^2$ **எனக்காட்டுக.**

தீர்வு :

$(z-1)^3+8=0$

$(z-1)^3=-8$

$(1-z)^3=8=2^3$

$\left(\frac{1-z}{2}\right)^3=1$

$\frac{1-z}{2}=(1)^{1/3}$

$\frac{1-z}{2}=1 \quad \frac{1-z}{2}=\omega \quad \frac{1-z}{2}=\omega^2$

$1-z=2 \quad 1-z=2\omega \quad 1-z=2\omega^2$

$\Rightarrow z=-1 \quad z=1-2\omega \quad z=1-2\omega^2$

$\therefore$ மூலங்கள் : $-1, 1-2\omega, 1-2\omega^2$

---

(7) $\sum_{k=1}^{8}\left(\cos\frac{2k\pi}{9}+i\sin\frac{2k\pi}{9}\right)$ **-ன் மதிப்பு காண்க.**

தீர்வு :

$x=\cos\frac{2k\pi}{9}+i\sin\frac{2k\pi}{9}$

$k=1 \quad x_1=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}=\omega$

$k=2 \quad x_2=\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}=\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)^2=\omega^2$

$k=3 \quad x_3=\cos\frac{6\pi}{9}+i\sin\frac{6\pi}{9}=\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)^3=\omega^3$

$k=4 \quad x_4=\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}=\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)^4=\omega^4$

$k=5 \quad x_5=\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}=\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)^5=\omega^5$

$k=6 \quad x_6=\cos\frac{12\pi}{9}+i\sin\frac{12\pi}{9}=\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)^6=\omega^6$

$k=7 \quad x_7=\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}=\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)^7=\omega^7$

$k=8 \quad x_8=\cos\frac{16\pi}{4}+i\sin\frac{16\pi}{9}=\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)^8=\omega^8$

$\sum_{k=1}^{8}\cos\frac{2k\pi}{9}+i\sin\frac{2k\pi}{9}$

$=\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6+\omega^7+\omega^8=-1$

$(\because 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6+\omega^7+\omega^8=0)$

---

(9) $z=2-2i$ **எனில், ஆதியைப் பொருத்து z -ஐ θ ரேடியன்கள் கடிகார திசைக்கு எதிர் திசையில் சுழற்றினால் z -ன் மதிப்பை கீழ்க்காணும் θ மதிப்புகளுக்கு காண்க.**

(i) $\theta=\frac{\pi}{3}$ **(ii)** $\theta=\frac{2\pi}{3}$ **(iii)** $\theta=\frac{3\pi}{2}$ **.**

தீர்வு :

$z=2-2i=r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad \& \quad a=2 \quad b=-2$

$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\alpha=\tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|=\tan^{-1}\left|\frac{-2}{2}\right|=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \theta=-\alpha=-\frac{\pi}{4}$ நான்காம் கால்பகுதியில் அமைகிறது

$\therefore z=2-2i=2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(i) $\theta=\frac{\pi}{3}$

$z_1=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

(ii) $\theta=\frac{2\pi}{3}$

$z_2=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})}=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

(iii) $\theta=\frac{3\pi}{2}$

$z_3=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}=2\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2})}=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

---

(8) $\omega \neq 1$ என்பது ஒன்றின் முப்படி மூலம் எனில், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $(1-\omega+\omega^2)^6+(1+\omega-\omega^2)^6=128$

(ii) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\ldots\left(1+\omega^{2^{11}}\right)=1$

(i) $(1-\omega+\omega^2)^6+(1+\omega-\omega^2)^6=128$

$L\cdot H\cdot S=(1-\omega+\omega^2)^6+(1+\omega-\omega^2)^6$

$=(1+\omega^2-\omega)^6+(1+\omega-\omega^2)^6$

$=(-\omega-\omega)^6+(-\omega^2-\omega^2)^6 \ =(-2\omega)^6+(-2\omega^2)^6$

$=(-2)^6\omega^6+(-2)^6(\omega^2)^6=64\omega^6+64\omega^{12}=64+64=128$

(ii) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\ldots\left(1+\omega^{2^{11}}\right)=1$

L.H.S

$(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\ldots\left(1+\omega^{2^{11}}\right)$

$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)(1+\omega^{16})$

$(1+\omega^{32})(1+\omega^{64})(1+\omega^{128})\ldots\left(1+\omega^{2^{11}}\right)$

$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega)$

$(1+\omega^2) \quad (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega)(1+\omega^2)$

$=[(1+\omega)(1+\omega^2)]^6=[1+\omega^2+\omega+\omega^3]^6=(0+1)^6=1^6=1$

---

(3) $\left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{10}+i\cos\frac{\pi}{10}}{1+\sin\frac{\pi}{10}-i\cos\frac{\pi}{10}}\right)^{10}$ -ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு : let $z=\sin\frac{\pi}{10}+i\cos\frac{\pi}{10}$

$\because |z|=1 \Rightarrow z^{-1}=\bar{z}=\sin\frac{\pi}{10}-i\cos\frac{\pi}{10}$

$\therefore \left[\frac{1+\sin\frac{\pi}{10}+i\cos\frac{\pi}{10}}{1+\sin\frac{\pi}{10}-i\cos\frac{\pi}{10}}\right]^{10}=\left[\frac{1+z}{1+\frac{1}{z}}\right]^{10}=\left[\frac{1+z}{\frac{z+1}{z}}\right]^{10}=(z)^{10}$

$=\left[\sin\frac{\pi}{10}+i\cos\frac{\pi}{10}\right]^{10} \ =i^{10}\left[\cos\frac{\pi}{10}-i\sin\frac{\pi}{10}\right]^{10}$

$=i^8\cdot i^2\left[\cos\frac{\pi}{10}\times 10-i\sin\frac{\pi}{10}\times 10\right]$

$=-1[\cos\pi-i\sin\pi]=-1(-1)=1$

---

5 -மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 2.4 - 7 (ii)

நிறுவுக: $\left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12}+\left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12}$ என்பது மெய் எண்.

தீர்வு :

$\frac{19-7i}{9+i}=\frac{19-7i}{9+i}\times\frac{9-i}{9-i} \ =\frac{171-19i-63i+7i^2}{9^2+1^2}$

$=\frac{171-82i-7}{81+1}=\frac{164-82i}{82} \ =\frac{82(2-i)}{82}=2-i$

$\frac{20-5i}{7-6i}=\frac{20-5i}{7-6i}\times\frac{7+6i}{7+6i} \ =\frac{140+120i-35i-30i^2}{7^2+6^2}$

$=\frac{140+85i+30}{49+36} \ =\frac{170+85i}{85}=\frac{85(2+i)}{85}=2+i$

$z=\left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12}+\left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12}=(2-i)^{12}+(2+i)^{12}$

$\bar{z}=\overline{(2-i)^{12}+(2+i)^{12}}$

$=\overline{(2-i)^{12}}+\overline{(2+i)^{12}}$

$=(\overline{2-i})^{12}+(\overline{2+i})^{12}$

$=(2+i)^{12}+(2-i)^{12}=z$

$\therefore z=\bar{z}$

$\left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12}+\left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12}$ என்பது மெய் எண்.

எடுத்துக்காட்டு 2.8(ii)

$\left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15}-\left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$ ஒரு முழுவதும் கற்பனை எண்.

தீர்வு :

$\mathbf{\frac{19+9i}{5-3i}=\frac{19+9i}{5-3i}\times\frac{5+3i}{5+3i}=\frac{95+57i+45i+27i^2}{5^2+3^2}=\frac{95+102i-27}{25+9}}$

$\mathbf{=\frac{68+102i}{34}=34\frac{(2+3i)}{34}=2+3i}$

$\mathbf{\frac{8+i}{1+2i}=\frac{8+i}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}=\frac{8-16i+i-2i^2}{1^2+2^2}}$

$\mathbf{=\frac{8-15i+2}{1+4}=\frac{10-15i}{5}=\frac{5(2-3i)}{5}=2-3i}$

$\mathbf{z=\left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15}-\left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}=(2+3i)^{15}-(2-3i)^{15}}$

$\mathbf{\bar{z}=\overline{(2+3i)^{15}-(2-3i)^{15}}}$

$\mathbf{=\overline{(2+3i)^{15}}-\overline{(2-3i)^{15}}}$

$\mathbf{=(\overline{2+3i})^{15}-(\overline{2-3i})^{15}}$

$\mathbf{=(2-3i)^{15}-(2+3i)^{15}}$

$\mathbf{=-\left[(2+3i)^{15}-(2-3i)^{15}\right]=-z}$

$\mathbf{\Rightarrow \bar{z}=-z}$

$\left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15}-\left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$ ஒரு முழுவதும் கற்பனை எண்.

எடுத்துக்காட்டு 2.14

1, $\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, மற்றும் $\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகளாக அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு : $z_1 = 1$; $z_2 = \frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_3 = \frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$AB = |z_1 - z_2| = \left|1-\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|1+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

$= \left|\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$

$BC = |z_2 - z_3| = \left|\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|$

$= \left|\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|i\frac{2\sqrt{3}}{2}\right| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{0^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{3}$

$AC = |z_1 - z_3| = \left|1-\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|1+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

$= \left|\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$

$AB = BC = AC$. எனவே இது சமபக்க முக்கோணத்தை உருவாக்குகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.15

z_1, z_2 மற்றும் z_3 என்ற கலப்பெண்கள் $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$ மற்றும் $z_1+z_2+z_3 \neq 0$ எனவும் இருந்தால் $\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right| = r$ என நிறுவுக.

கொடுக்கப்பட்டது $|z_1| = r$

$|z_1|^2 = r^2 \Rightarrow z_1\overline{z_1} = r^2$

$z_1 = \frac{r^2}{\bar{z}_1}$, $z_2 = \frac{r^2}{\bar{z}_2}$, $z_3 = \frac{r^2}{\bar{z}_3}$

$z_1+z_2+z_3 = \frac{r^2}{\bar{z}_1}+\frac{r^2}{\bar{z}_2}+\frac{r^2}{\bar{z}_3} = r^2\left(\frac{1}{\bar{z}_1}+\frac{1}{\bar{z}_2}+\frac{1}{\bar{z}_3}\right)$

$= r^2\left(\frac{\bar{z}_2\bar{z}_3+\bar{z}_1\bar{z}_3+\bar{z}_1\bar{z}_2}{\bar{z}_1\bar{z}_1\bar{z}_3}\right) = r^2\,\frac{(\overline{z_2z_3}+\overline{z_1z_3}+\overline{z_1z_2})}{\overline{z_1z_2z_3}}$

$|z_1+z_2+z_3| = \frac{|r^2(\overline{z_2z_1}+\overline{z_1z_3}+\overline{z_1z_2})|}{|\overline{z_1z_2z_3}|} = |r^2|\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1||z_2||z_3|}$

$|z_1+z_2+z_3| = r^2\,\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{r.r.r}$

$\frac{r^3}{r^2} = \frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{|z_1+z_2+z_3|}$ $\quad\therefore r = \left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|$

பயிற்சி 2.5 (7):

$|z_1| = 1, |z_2| = 2, |z_3| = 3$ மற்றும் $|z_1+z_2+z_3| = 1$ என்றவாறு உள்ளது எனில் $|9z_1z_2+4z_1z_3+z_2z_3| = 6$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $|z_1| = 1$ $\quad|z_2| = 2$ $\quad|z_3| = 3$

$|z_1|^2 = 1$ $\quad|z_2|^2 = 4$ $\quad|z_3|^2 = 9$

$z_1\overline{z_1} = 1$ $\quad z_2\overline{z_2} = 4$ $\quad z_3\overline{z_3} = 9$

$z_1 = \frac{1}{\overline{z_1}}$ $\quad z_2 = \frac{4}{\overline{z_2}}$ $\quad z_3 = \frac{9}{\overline{z_3}}$

$|z_1+z_2+z_3| = 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{\overline{z_1}}+\frac{4}{\overline{z_2}}+\frac{9}{\overline{z_3}}\right| = 1$

$\left|\frac{\bar{z}_2\bar{z}_3+4\bar{z}_1\bar{z}_3+9\bar{z}_1\bar{z}_2}{\bar{z}_1\bar{z}_2\overline{z_3}}\right| = 1 \Rightarrow \frac{|\overline{z_2z_3}+4\overline{z_1z_3}+9\overline{z_1z_2}|}{|\overline{z_1z_2z_3}|}$

$|\overline{z_2z_3+4z_1z_3+9z_1z_2}| = |z_1z_2z_3|$

$|z_2z_3+4z_1z_3+9z_1z_2| = |z_1|\,|z_2||z_3|$

$\Rightarrow |z_2z_3+4z_1z_3+9z_1z_2| = 6$

பயிற்சி 2.5 - (9)

9. $z^3+2\bar{z} = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஐந்து தீர்வுகள் இருக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$z^3+2\bar{z} = 0$ - (1)

$z^3 = -2\bar{z} \Rightarrow |z|^3 = |-2||\bar{z}|$

$|z|^3 = 2|z| \Rightarrow |z|^3-2|z| = 0$

$|z|(|z|^2-2) = 0$

$|z| = 0$ & $|z|^2-2 = 0$

$z = 0$ $\quad|z|^2 = 2 \Rightarrow z\bar{z} = 2 \Rightarrow \bar{z} = \frac{2}{z}$

1 வது சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$z^3+2\cdot\frac{2}{z} = 0 \Rightarrow z^4+4 = 0$

$|z| = 0$ $\quad z^4+4 = 0$

$\Rightarrow z = 0$ & $z^4+4 = 0$

சமன்பாட்டிற்கு ஐந்து தீர்வுகள் இருக்கும்

பயிற்சி **2.6(2)**

$z = x+iy$ என்ற ஏதேனும் ஒரு கலப்பெண் $\mathrm{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = 0$ எனுமாறு அமைந்தால் z-ன் நியமப்பாதை $2x^2+2y^2+x-2y = 0$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $z = x+iy$

$\frac{2z+1}{iz+1} = \frac{2(x+iy)+1}{i(x+iy)+1} = \frac{2x+i2y+1}{ix+i^2y+1}$

$= \frac{(2x+1)+i2y}{(1-y)+ix}\times\frac{(1-y)-ix}{(1-y)-ix}$

$= \frac{(2x+1)(1-y)-ix(2x+1)+i2y(1-y)}{(1-y)^2+x^2}$

$= \left[\frac{(2x+1)(1-y)+2xy}{(1-y)^2+x^2}\right]+i\left[\frac{2y(1-y)-x(2x+1)}{(1-y)^2+x^2}\right]$

R.P **I.P**

$\mathrm{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2y(1-y)-x(2x+1)}{(1-y)^2+x^2} = 0$

$2y-2y^2-2x^2-x = 0$

$\therefore$ நியமப்பாதை $\rightarrow 2x^2+2y^2+x-2y = 0$

எடுத்துக்காட்டு 2.27: $z = x + iy \quad \arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2}$

∴z -ன் நியமப்பாதை $x^2 + y^2 = 1$.

Solution : $z = x + iy$

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy} \times \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)-iy(x-1)+iy(x+1)-i^2y^2}{(x+1)^2+y^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)+y^2}{(x+1)^2+y^2} + i\,\frac{y(x+1)-y(x-1)}{(x+1)^2+y^2}$$

R.P I.P

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan^{-1}\left[\frac{\frac{y(x+1)-y(x-1)}{(x+1)^2+y^2}}{\frac{(x-1)(x+1)+y^2}{(x+1)^2+y^2}}\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{y(x+1)-y(x-1)}{(x-1)(x+1)+y^2} = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$$

$\Rightarrow$ Dr $= 0$ i.e $(x-1)(x+1) + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 + y^2 = 0$

$$x^2 + y^2 = 1$$

பயிற்சி 2.7(6)

If $z = x + iy \quad \arg\left(\frac{z-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ **எனுமாறு அமைந்தால்**

z -ன் நியமப்பாதை $x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$ எனக் காட்டுக

Solution : $z = x + iy$

$$\frac{z-i}{z+2} = \frac{x+iy-i}{x+iy+2} = \frac{x+i(y-1)}{(x+2)+iy} \qquad = \frac{x+i(y-1)}{(x+2)+iy} \times \frac{(x+2)-iy}{(x+2)-iy}$$

$$= \frac{x(x+2)-ixy+i(y-1)(x+2)-i^2y(y-1)}{(x+2)^2+y^2}$$

$$= \frac{x(x+2)+y(y-1)}{(x+2)^2+y^2} + i\,\frac{(y-1)(x+2)-xy}{(x+2)^2+y^2}$$

$$\arg\left(\frac{z-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan^{-1}\left[\frac{\frac{(y-1)(x+2)-xy}{(x+2)^2+y^2}}{\frac{x(x+2)+y(y-1)}{(x+2)^2+y^2}}\right] = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{(y-1)(x+2)-xy}{x(x+2)+y(y-1)} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$xy + 2y - x - 2 - xy = x^2 + 2x + y^2 - y$$

$$x^2 + y^2 + 2x - y - 2y + x + 2 = 0$$

நியமப்பாதை $x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$

பயிற்சி 2.7 (4):

$\frac{1+z}{1-z} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ எனில் $z = i \tan\theta$ என நிறுவுக

Solution : $\frac{1+z}{1-z} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$

$$\frac{1+z}{1-z} = e^{i2\theta} \Rightarrow 1 + z = e^{i2\theta}(1-z) = e^{i2\theta} - ze^{i2\theta}$$

$$z + ze^{i2\theta} = e^{i2\theta} - 1 \Rightarrow z(1 + e^{i2\theta}) = e^{i2\theta} - 1$$

$z = \frac{e^{i2\theta}-1}{1+e^{i2\theta}}$ nr & dr $e^{i\theta}$- ஆல் வகுக்க

$$z = \frac{e^{i\theta}-\frac{1}{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \frac{\cos\theta+i\sin\theta-(\cos\theta-i\sin\theta)}{\cos\theta+i\sin\theta+\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$z = \frac{\cos\theta+i\sin\theta-\cos\theta+i\sin\theta}{2\cos\theta} = \frac{2i\sin\theta}{2\cos\theta} \Rightarrow z = i\tan\theta$$

பயிற்சி 2.7 (5)

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sin a + \sin\beta + \sin\gamma$ எனில்

$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha + \beta + \gamma)$

$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ என நிறுவுக

Solution :

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$$

$$i\sin\alpha + i\sin\beta + i\sin\gamma = 0i$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + i\sin\alpha + i\sin\beta + i\sin\gamma \quad = 0 + i0 \text{ --}$$

let $a = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$; $\quad b = \cos\beta + i\sin\beta = e^{i\beta}$

$$c = \cos\gamma + i\sin\gamma = e^{i\gamma}$$

From (A) we get $\quad a + b + c = 0$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$(e^{i\alpha})^3 + \left(e^{i\beta}\right)^3 + (e^{i\gamma})^3 = 3e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} \cdot e^{i\gamma}$$

$$\Rightarrow e^{i3\alpha} + e^{i3\beta} + e^{i\beta\gamma} = 3e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha + \cos 3\beta + i\sin 3\beta + \cos 3\gamma + i\sin 3\gamma$$
$$= 3(\cos(\alpha + \beta + \gamma) + i\ \sin(\alpha + \beta + \gamma))$$

$$(\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma) + i(\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma)$$

$$= 3[\cos(\alpha + \beta + \gamma)] + \sin(\alpha + \beta + \gamma)]$$

மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை சம படுத்த

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha + \beta + \gamma)$$
$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

Eg 2.34: *தீர்க்க* : $z^3 + 8i = 0$

$$z^3 + 8i = 0$$
$$z^3 = -8i$$
$$= 8(-i)$$

$$z^3 = 8\left[\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 8\left[\cos\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$z^3 = 8\left[\cos\left(\frac{4k\pi-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{4k\pi-\pi}{2}\right)\right]$$

$$z = 8^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\frac{4k\pi-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{4k\pi-\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$z = (2^3)^{1/3}\left[\cos(4k-1)\frac{\pi}{6} + i\sin(4k-1)\frac{\pi}{6}\right]$$

$$k = 0,\ 1\ ,\ 2$$

$$k = 0,\ z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$$= \sqrt{3} - i$$

$$k = 1, z = 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = 2(0 + i) = 2i$$

$$k = 2,\ z = 2\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{3} - i$$

எடுத்துக்காட்டு -2.35

$\sqrt{3}+i$ ன் எல்லா மூன்றாம் படிமூலங்களையும் காண்

Solution :

Let $z=\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}=(\sqrt{3}+i)^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt{3}+i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$a=\sqrt{3}\quad b=1\quad a^2=3\quad b^2=1$

$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

$\alpha=\tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|=\tan^{-1}\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\alpha=\frac{\pi}{6}$

$\theta=\alpha=\frac{\pi}{6}\quad \sqrt{3}+i$ **lies in I Quadrant**

$$\sqrt{3}+i=2\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$
$$=2\left[\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$=2\left[\cos\left(\frac{12k\pi+\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{12k\pi+\pi}{6}\right)\right]$$

$$(\sqrt{3}+i)^{1/3}=2^{1/3}\left[\cos\left(\frac{12k\pi+\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{12k\pi+\pi}{6}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$z=2^{1/3}\left[\cos(12k+1)\frac{\pi}{18}+i\sin(12k+1)\frac{\pi}{18}\right.$$

$k=0,1,2$

$k=0\ \ z_1=2^{1/3}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)=2^{1/3}e^{i\frac{\pi}{18}}$

$k=1\ \ z_2=2^{1/3}\left[\cos\frac{13\pi}{18}+i\sin\frac{13\pi}{18}\right]=2^{1/3}e^{i\frac{13\pi}{18}}$

$k=2\ \ z_3=2^{1/3}\left[\cos\frac{25\pi}{18}+i\sin\frac{25\pi}{18}\right]=2^{1/3}e^{i\frac{25\pi}{18}}$

பயிற்சி - 2.7(3)

(3) If $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\dots(x_n+iy_n)=a+ib$

show that $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\dots(x_n^2+y_n^2)=a^2+b^2$

$\sum_{r=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{y_r}{x_r}\right)=k\pi+\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\qquad k\in z$

Solution :

(i) $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\dots(x_n+iy_n)=a+ib$

$|(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\dots(x_n+iy_n)|=|a+ib|$

$|(x_1+iy_1)||(x_2+iy_2)|\dots|(x_n+iy_n)|=|a+ib|$

$\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cdots\sqrt{x_n^2+y_n^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

On squaring : $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\dots(x_n^2+y_n^2)=a^2+b^2$

(ii) $\arg[(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\dots(x_n+iy_n)]=\arg(a+ib)$

$\arg(x_1+iy_1)+\arg(x_2+iy_2)+\cdots+\arg(x_n+iy_n)$

$=\arg(a+ib)$

$\Rightarrow\tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{y_2}{x_2}\right)+\cdots+\tan^{-1}\left(\frac{y_n}{x_n}\right)=$

$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$\tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{y_2}{x_2}\right)+\cdots+\tan^{-1}\left(\frac{y_n}{x_n}\right)=k\pi+\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

எடுத்துக்காட்டு: 2.36.

z_1, z_2, z_3 $|z|=2$ என்ற வட்டத்தின் மேலமைந்த

சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள் எனில் ,

$z_1=1+i\sqrt{3}$. $, z_2, z_3$ காண்க

Solution :

$z_1=1+i\sqrt{3}$

$$z_2=(1+i\sqrt{3})\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=(1+i\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}+i^2\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{4}{2}=-2$$

$$z_3=-2\left[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$$
$$=-2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{2}-i\,2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=1-i\sqrt{3}$$

$\therefore z_2=-2\ ;\ z_3=1-i\sqrt{3}$

$x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha\ \Rightarrow\ x^2+1=2\cos\alpha x$

$x^2-2\cos\alpha x+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=0$

$(x-\cos\alpha)^2=-\sin^2\alpha\Rightarrow(x-\cos\alpha)^2=i^2\sin^2\alpha$

$x-\cos\alpha=\pm\sqrt{i^2\sin^2\alpha}\ \Rightarrow\ x=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$

$x=\cos\alpha+i\sin\alpha$

இதுபோல $\quad y=\cos\beta+i\sin\beta$

பயிற்சி 2.8 (4) :$2\cos\alpha=x+\frac{1}{x}$ & $2\cos\beta=y+\frac{1}{y}$ எனில்

(i) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\cos(\alpha-\beta)$

(ii) $xy-\frac{1}{xy}=2i\sin(\alpha+\beta)$

$\frac{x}{y}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta}=\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$

$\frac{y}{x}=\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}=[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]^{-1}$

$=\cos(\alpha-\beta)-i\sin(\alpha-\beta)$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)+$

$\cos(\alpha-\beta)-i\sin(\alpha-\beta)$

$=2\cos(\alpha-\beta)$

$xy=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$

$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$

$\frac{1}{xy}=(xy)^{-1}=[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(x+\beta)]^{-1}$

$=\cos(\alpha+\beta)-i\sin(\alpha+\beta)$

$xy-\frac{1}{xy}=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$

$-\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$

$xy-\frac{1}{xy}=2i\sin(\alpha+\beta)$

அத்தியாயம் 3 - சமன்பாட்டியல்

2 – மதிப்பெண்கள், 3 –- மதிப்பெண்கள்

2 – மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 3.1 - 2(i)

கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களைக் கொண்டு முப்படி சமன்பாடுகளை உருவாக்குக1,2, மற்றும் 3

தீர்வு :

$\alpha = 1 \quad \beta = 2 \quad \gamma = 3$

$\Sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma = 1 + 2 + 3 = 6$

$\Sigma_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 1(2) + 1(3) + 2(3)$

$= 2 + 3 + 6 = 11$

$\Sigma_3 = \alpha\beta\gamma = 1(2)(3) = 6.$

$\therefore$ சமன்பாடு: $x^3 - \Sigma_1 x^2 + \Sigma_2 x - \Sigma_3 = 0$

$\therefore x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$

பயிற்சி 3.1 2(ii)

கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களைக் கொண்டு முப்படி சமன்பாடுகளை உருவாக்குக 1,1, மற்றும் -2

தீர்வு :

$\alpha = 1 \quad \beta = 1 \quad \gamma = -2$

$\Sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma = 1 + 1 + (-2) = 2 - 2 = 0$

$\Sigma_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 1(1) + 1(-2) + 1(-2)$

$= 1 - 2 - 2 = -3$

$\Sigma_3 = \alpha\beta\gamma = 1(1)(-2) = -2.$

$\therefore$ சமன்பாடு $x^3 - \Sigma_1 x^2 + \Sigma_2 x - \Sigma_3 = 0$

$\therefore x^3 - 0x^2 + (-3)x - (-2) = 0$

i.e $x^3 - 3x + 2 = 0$

பயிற்சி 3.1 2(iii) கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களைக் கொண்டு முப்படி சமன்பாடுகளை உருவாக்குக 2 , $\frac{1}{2}$ மற்றும் 1

தீர்வு :

$\alpha = 2 \; \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1.$

$\Sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma = 2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{4+1+2}{2} = \frac{7}{2}$

$\Sigma_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2(1) + \frac{1}{2}(1)$

$= 1 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{2+4+1}{2} = \frac{7}{2}$

$\Sigma_3 = \alpha\beta\gamma = 2\left(\frac{1}{2}\right)(1) = 1.$

$\therefore$ சமன்பாடு: $x^3 - \Sigma_1 x^2 + \Sigma_2 x - \Sigma_3 = 0$

$\therefore x^3 - \left(\frac{7}{2}\right)x^2 + \frac{7}{2}(x) - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0.$

---

8. α, β, γ மற்றும் δ ஆகியன $2x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 8 = 0$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ மற்றும் $\alpha\beta\gamma\delta$ ஆகியவற்றினை மூலங்களாகவும் முழு எண்களை கெழுக்களாகவும் கொண்ட ஓர் இருபடி சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

$2x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 0x + 8 = 0$

$a = 2 \quad b = 5 \quad c = -7 \quad d = 0 \quad e = 8$

$\Sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -b/a = -5/2$

$\Sigma_4 = \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a} = \frac{8}{2} = 4$

மூலங்கள் - $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ மற்றும் $\alpha\beta\gamma\delta$

அதாவது $-5/2$ மற்றும் 4 .

மூலங்கள் கூட்டுத்தொகை $= -\frac{5}{2} + 4 = \frac{-5+8}{2} = \frac{3}{2}$

மூலங்கள் பெருக்கம் $= \frac{-5}{2}(4) = -10$

சமன்பாடு : $x^2 - (S.O.R)x + P.O.R = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + (-10) = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 20 = 0$.

---

(11) 12 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு மரம் இரு பகுதிகளாக முறிந்துள்ளது. முறிந்த இடம் வரை இருக்கும் கீழ்ப்பகுதி, உடைப்பின் மேற்பகுதியின் நீளத்தின் கனமூலம் ஆகும். இந்தத் தகவலை கீழ்ப்பகுதியின் நீளம் காணும் வகையில் கணிதவியல் கணக்காக மாற்றுக.

தீர்வு :

$AC = 12$, $AB = x$, $BC = 12 - x$

கொடுக்கப்பட்டது: $x = \sqrt[3]{12 - x}$

$\Rightarrow x^3 = 12 - x \Rightarrow x^3 + x - 12 = 0$

பயிற்சி 3.2

(2) $2 + \sqrt{3}i$ -ஐ மூலமாகக் கொண்ட குறைந்தபட்ச படியுடன் விகிதமுறு கெழுக்களுடைய ஓர் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது $2 + \sqrt{3}i$ ஒரு மூலம்

$\therefore$ மற்றொரு மூலம் $2 - \sqrt{3}i$

மூலங்கள் கூட்டுத்தொகை $= 2 + \sqrt{3}i + 2 - \sqrt{3}i = 4$

மூலங்களின் பெருக்கம்$= (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i)$

$= 2^2 + \sqrt{3}^2 = 4 + 3 = 7$

$\therefore$ சமன்பாடு

$x^2 - \left(\text{மூலங்கள் கூட்டுத்தொகை}\right)x + \text{மூலங்களின் பெருக்கம்} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 7 = 0$

---

(3) $2i + 3$ -ஐ மூலமாகக் கொண்ட குறைந்தபட்ச படியுடன் விகிதமுறு கெழுக்களுடைய ஓர் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மூலம் $2i + 3 = 3 + 2i$

மற்றொரு மூலம் $3 - 2i$

மூலங்கள் கூட்டுத்தொகை $= 3 + 2i + 3 - 2i = 6$

மூலங்களின் பெருக்கம்$= (3 + 2i)(3 - 2i)$

$= 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

$\therefore$ சமன்பாடு

$x^2 - \left(\text{மூலங்கள் கூட்டுத்தொகை}\right)x + \text{மூலங்களின் பெருக்கம்} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 13 = 0$

பயிற்சி 3.3

(7) $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$x^4 - 14x^2 + 45 = 0$

$(x^2)^2 - 14x^2 + 45 = 0$ let $t = x^2$

$t^2 - 14t + 45 = 0$

$\Rightarrow (t-9)(t-5) = 0$

$t - 9 = 0 \quad t - 5 = 0$

$t = 9 \quad t = 5$

$\Rightarrow x^2 = 9 \quad \Rightarrow x^2 = 5$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

$\Rightarrow x = \pm 3$

மூலங்கள் : $3, -3, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$

பயிற்சி 3.5

2(ii) $x^8 - 3x + 1 = 0$

தீர்வு :

இங்கு $a_n = 1$, $a_0 = 1$

$\frac{p}{q}$ பல்லுறுப்பு கோவையின் ஒரு மூலம்

இங்கு $(p, q) = 1$, $a_0 = 1$-ன் காரணி p மற்றும் $a_n = 1$-ன் காரணி q . 1 க்கு காரணி இல்லை ஆதலால் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு விகிதமுறு மூலங்கள் இல்லை.

பயிற்சி 3.6

1. $9x^9 - 4x^8 + 4x^7 - 3x^6 + 2x^5 + x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் அதிகபட்ச சாத்தியமான மிகை எண் மற்றும் குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கையை ஆராய்க .

தீர்வு :

$p(x) = 9x^9 - 4x^8 + 4x^7 - 3x^6 + 2x^5 + x^3 + 7x^2 + 7x + 2$

என்க $p(x)$ - ன் குறிகளை பின்வருமாறு எழுதலாம்

$p(x) = 9x^9 - 4x^8 + 4x^7 - 3x^6 + 2x^5 + x^3 + 7x^2 + 7x + 2$

$+ \underbrace{-}_{1} \underbrace{+}_{2} \underbrace{-}_{3} \underbrace{+}_{4} + + + +$

$p(x)$ – க்கு நான்கு முறை குறி மாற்றம் நிகழ்ந்துள்ளது மற்றும் $p(x)$ - ன் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை 4 – க்கு மிகாது . மேலும்

$p(-x) = 9(-x)^9 - 4(-x)^8 + 4(-x)^7 - 3(-x)^6 + 2(-x)^5 + (-x)^3 + 7(-x)^2 + 7(-x) + 2$

$= -9x^9 - 4x^8 - 4x^7 - 3x^6 - 2x^5 - x^3 + 7x^2 - 7x + 2$ - ன் குறிகள்

$= -9x^9 - 4x^8 - 4x^7 - 3x^6 - 2x^5 - x^3 + 7x^2 - 7x + 2$

$- \; - \; - \; - \; - \; - \; + \; - \; +$

எனவே $p(-x)$ – க்கு இரண்டு முறை குறீ மாற்றம் நிகழ்ந்துள்ளது . $p(x)$ – க்கு அதிகபட்சம் இரண்டு குறை

---

(2) $x^9 - 5x^5 + 4x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு குறைந்தபட்சம் 6 மெய்யற்ற கலப்பெண் தீர்வுகள் உண்டு எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$p(x) = x^9 - 5x^5 + 4x^4 + 2x^2 + 1$ என்க

குறிகள் :

$+ \underbrace{-}_{1} \underbrace{+}_{2} + +$

p(x) - ல் இரண்டு குறிமாற்றம் நிகழ்ந்துள்ளது.

மேலும் $p(-x) = (-x)^9 - 5(-x)^5 + 4(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1$

$= -x^9 + 5x^5 + 4x^4 + 2x^2 + 1$

$- \underbrace{+}_{1} + + +$

p(-x)க்கு ஒரே ஒரு குறி மாற்றம்.

∴ p(x) க்கு அதிகபட்சம் இரண்டு மிகை மூலம் மற்றும் 1 குறை மூலம் உள்ளது. p(x) – ன் படி 9, ஆதலால் p(x)க்கு குறைந்தபட்சம் 6 கற்பனை தீர்வுகள் உள்ளன.

---

(3) $x^9 - 5x^8 - 14x^7 = 0$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டின் மிகையெண் மற்றும் குறையெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கையை தீர்மானிக்க.

தீர்வு :

$p(x) = x^9 - 5x^8 - 14x^7$

$+ \underbrace{-}_{} -$ என்க

p(x) க்கு ஒரே ஒரு குறி மாற்றம் நிகழ்ந்துள்ளது.

மேலும் $p(-x) = (-x)^9 - 5(-x)^8 - 14(-x)^7$

$= -x^9 - 5x^8 + 14x^7$

$- - \underbrace{+}_{}$

$p(-x)$ க்கு ஒரே ஒரு குறி மாற்றம் நிகழந்துள்ளது.

∴ $p(-x)$-க்கு அதிகபட்சம் ஒரு மிகை மற்றும் ஒரு குறை மூலம் உள்ளது.

---

(4) $x^9 + 9x^7 + 7x^5 + 5x^3 + 3x$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் மெய்யெண் மற்றும் மெய்யற்ற கலப்பெண் பூச்சியமாக்கிகளின் துல்லியமான எண்ணிக்கையைக் கண்டறிக.

தீர்வு :

$p(x) = x^9 + 9x^7 + 7x^5 + 5x^3 + 3x$ என்க

p(x) க்கு குறி மாற்றம் இல்லை.

$p(-x) = -x^9 - 9x^7 - 7x^5 - 5x^3 - 3x$

p(-x) க்கு குறி மாற்றம் இல்லை

∴ p(x) க்கு மிகை மற்றும் குறை மூலங்கள் இல்லை.

3 - மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 3.1

3) . $x^3+2x^2+3x+4=0$ எனும் முப்படி சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α ,β மற்றும் γ எனில் கீழ்க்காணும் மூலங்களைக் கொண்டு முப்படி சமன்பாடுகளை உருவாக்குக.

(i)$2\alpha, 2\beta$, மற்றும் 2γ (ii)$\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, மற்றும் $\frac{1}{\gamma}$

(iii)$-\alpha, -\beta$, மற்றும் $-\gamma$

தீர்வு :

$x^3+2x^2+3x+4=0 \quad a=1 \quad b=2 \quad c=3 \quad d=4$

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}=-\frac{2}{1}=-2$

$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=c/a=\frac{3}{1}=3$

$\alpha\beta\gamma=-d/a=-4/1=-4$

(i) மூலங்கள் - 2α , 2β , 2γ .

$\Sigma_1=2\alpha+2\beta+2\gamma=2(\alpha+\beta+\gamma)=2(-2)=-4$

$\Sigma_2=(2\alpha)(2\beta)+(2\alpha)(2\gamma)+(2\beta)(2\gamma)$
$=4\alpha\beta+4\alpha\gamma+4\beta\gamma$
$=4(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=4(3)=12$

$\Sigma_3=(2\alpha)(2\beta)(2\gamma)=8\alpha\beta\gamma=8(-4)=-32$

சமன்பாடு : $x^3-\Sigma_1x^2+\Sigma_2x-\Sigma_3=0$

$x^3-(-4)x^2+12x-(-32)=0$

$\Rightarrow x^3+4x^2+12x+32=0$

(ii) மூலங்கள் - $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$

$$\Sigma_1=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{-4}=\frac{-3}{4}$$

$$\Sigma_2=\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}.\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha\gamma}=\frac{\gamma+\alpha+\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{4}$$

$$\Sigma_3=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{-4}=\frac{-1}{4}$$

சமன்பாடு : $x^3-\Sigma_1x^2+\Sigma_2x-\Sigma_3=0$

$$x^3-\left(\frac{-3}{4}\right)x^2+\frac{2}{4}x-\left(-\frac{1}{4}\right)=0 \quad \Rightarrow 4x^3+3x^2+2x+1=0.$$

(iii) மூலங்கள்- $-\alpha$, $-\beta$, $-r$

$\Sigma_1=(-\alpha)+(-\beta)+(-\gamma)=-(\alpha+\beta+\gamma)=-(-2)=2$

$\Sigma_2=(-\alpha)(-\beta)+(-\alpha)(-\gamma)+(-\beta)(-\gamma)$
$=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=3$

$\Sigma_3=(-\alpha)(-\beta)(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-(-4)=4$

சமன்பாடு : $x^3-\Sigma_1x^2+\Sigma_2x-\Sigma_3=0$

$x^3-(+2)x^2+3x-4=0 \Rightarrow x^3-2x^2+3x-4=0.$

---

5) $2x^4-8x^3+6x^2-3=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு : $2x^4-8x^3+6x^2+0x-3=0$; மூலங்கள்- $\alpha,\beta,\gamma,\delta$

$a=2 \quad b=-8 \quad c=6 \quad d=0 \quad e=-3$

$$\Sigma_1=\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-8)}{2}=4$$

$\Sigma_2=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta$
$=\frac{c}{a}=\frac{6}{2}=3.$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-$
$2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(4)^2-2(3)$
$=16-6=10.$

---

(7) α , β, மற்றும் γ ஆகியன $ax^3+bx^2+cx+d=0$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை சமன்பாட்டின் மூலங்களாக இருப்பின், கெழுக்கள் வாயிலாக $\sum\frac{\alpha}{\beta\gamma}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$ax^3+bx^2+cx+d=0$

மூலங்கள்- α,β,γ

$\Sigma_1=\alpha+\beta+\gamma=-b/a$

$\Sigma_2=\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=c/a$

$\Sigma_3=\alpha\beta\gamma=-d/a$

கண்டுபிடிக்க : $\sum\frac{\alpha}{\beta\gamma}=\frac{\alpha}{\beta\gamma}+\frac{\beta}{\alpha\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha\beta}$

$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2.\frac{c}{a}}{-\frac{d}{a}}=\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{-\frac{d}{a}}$

$=\frac{b^2-2ac}{a^2}\times-\frac{a}{d}=\frac{2ac-b^2}{ad}$

---

9. $lx^2+nx+n=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் p மற்றும் q எனில், $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

$lx^2+nx+n=0$

$a=l , b=n , c=n$

மூலங்கள் - p , q

$\Rightarrow p+q=\frac{-b}{a}=\frac{-n}{l}$

மேலும் $pq=\frac{c}{a}=\frac{n}{l}$

இப்போது , $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}+\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=\frac{p+q}{\sqrt{pq}}+\sqrt{\frac{n}{l}}$

$=\frac{-n/l}{\sqrt{\frac{n}{l}}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=\frac{-\sqrt{\frac{n}{l}}\sqrt{\frac{n}{l}}}{\sqrt{\frac{n}{l}}}+\sqrt{\frac{n}{l}}$

$=-\sqrt{\frac{n}{l}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0$

---

10. $x^2+px+q=0$ மற்றும் $x^2+p'x+q'=0$ ஆகிய இரு சமன்பாடுகளுக்கும் ஒரு பொதுவான மூலம் இருப்பின், அம் மூலம் $\frac{pq'-p'q}{q-q'}$ அல்லது $\frac{q-q'}{p'-p}$ ஆகும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

$x^2+px+q=0 \qquad x^2+p'x+q'=0$

α பொதுவான மூலமாக இருக்கட்டும்

$\alpha^2+p\alpha+q=0$

& $\alpha^2+p'\alpha+q'=0$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{pq'-p'q}=\frac{\alpha}{q-q'}=\frac{1}{p'-p}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{\alpha}=\frac{pq'-p'q}{q-q'} \quad \& \quad \alpha=\frac{q-q'}{p'-p}$$

$\Rightarrow \alpha=\frac{pq'-p'q}{q-q'}$ or $\frac{q-q'}{p'-p.}$

பயிற்சி 3.2:

1} k என்பது மெய்யெண் எனில், $2x^2+kx+k=0$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் இயல்பை, k வழியாக ஆராய்க.

தீர்வு :

$2x^2+kx+k=0 \quad a=2 \;\; b=k \;\; c=k$

$\Delta=b^2-4ac=k^2-4(2)k=k^2-8k=k(k-8)$

(i) மெய் மற்றும் சமமான மூலங்களுக்கு $\Delta=0$

$\Rightarrow k(k-8)=0 \;\; k=0 \;\; k=8$

(ii) மெய்யான மற்றும் தனித்துவமான மூலங்களுக்கு $\Delta>0$

$\Rightarrow k(k-8)>0 \;\; \Rightarrow k\in(-\infty,0)\cup(8,\infty)$

(iii) கற்பனை மூலங்களுக்கு $\Delta<0$

$\Rightarrow k(k-8)<0 \;\; \Rightarrow k\in(0,8)$

---

5) ஒரு நேர்க்கோடும் ஒரு பரவளையமும் இரு புள்ளிகளுக்கு மேற்பட்டு வெட்டிக் கொள்ளாது என்பதனை நிரூபிக்க.

தீர்வு :

பரவளைய சமன்பாடு: $y^2=4ax$ – (1)

கோட்டின் சமன்பாடு : $y=mx+c$ – (2)

(1) இல் (2) மாற்று $(mx+c)^2=4ax$

$\Rightarrow m^2x^2+2mcx+c^2=4ax$

$\Rightarrow m^2x^2+(2mc-4a)x+c^2=0$

இது x இல் உள்ள இருபடிச் சமன்பாடு, x அதிகபட்சம் இரண்டு மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கலாம்

பயிற்சி: 3.3

1. $2x^3-x^2-18x+9=0$ எனும் முப்படி பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களில் இரண்டின் கூட்டல் தொகை பூச்சியமெனில் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

தீர்வு :

$2x^3-x^2-18x+9=0\,; \quad a=2 \quad b=-1 \quad c=-18 \quad d=9$

மூலங்கள் α,β,γ ஆக இருக்கட்டும்

கொடுக்கப்பட்டது $\alpha+\beta=0$

மேலும் $\alpha+\beta+\gamma=\frac{-b}{a}=\frac{-(-1)}{2}=\frac{1}{2}$

$\because \alpha+\beta=0 \quad \Rightarrow \gamma=1/2$

$\frac{1}{2}$	2	-1	-18	9
	0	1	0	-9
	2	0	-18	0

இருபடிச் சமன்பாடு : $2x^2-18=0$

$\Rightarrow x^2-9=0$

$\Rightarrow x^2=9$

$\Rightarrow x=\pm 3$

மூலங்கள் : $3\,,-3\,,\frac{1}{2}$.

---

2. $9x^3-36x^2+44x-16=0$ -ன் மூலங்கள் கூட்டுத் தொடரில் அமைந்தவை எனில், சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு :

$9x^3-36x^2+44x-16=0$

$a=9 \quad b=-36 \quad c=44 \quad d=-16$

மூலங்கள் α,β,γ கூட்டுத் தொடரில் இருக்கட்டும்.

$\alpha=a_1-d\,,\ \beta=a_1\,,\ r=a_1+d$

மூலங்கள் கூட்டுத்தொகை

$=a_1-d+a_1+a_1+d=\frac{-b}{a}=\frac{-(-36)}{9}$

$\Rightarrow 3a_1=4$

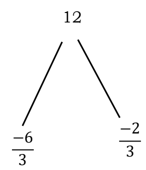
$\Rightarrow a_1=4/3$

$\frac{4}{3}$	9	-36	44	-16
	0	12	-32	16
	9	-24	12	0

இருபடி சமன்பாடு

$9x^2-24x+12=0$

$\div 3 \quad 3x^2-8x+4=0$



$(x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right)=0$

$\therefore x=2\,,2/3$

$\therefore$ மூலங்கள் : $2\,,\ \frac{2}{3}\,,\ \frac{4}{3}$

---

3. $3x^3-26x^2+52x-24=0$ -ன் மூலங்கள் பெருக்குத் தொடரில் அமைந்தவை எனில், சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு :

$3x^3-26x^2+52x-24=0$

$a=3 \quad b=-26 \quad c=52 \quad d=-24$

மூலங்கள் α,β,γ . ஆக இருக்கட்டும்.

மூலங்கள் வடிவியல் முன்னேற்றத்தில் உள்ளன

$\alpha=\frac{a_1}{r} \quad \beta=a_1 \quad \gamma=a_1r$

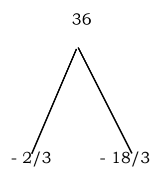
மூலங்களின் பெருக்கம் $=\frac{a_1}{r}\cdot a_1\cdot a_1r=\frac{-(d)}{a}$

$\Rightarrow a_1^3=\frac{-(-24)}{3}=\frac{24}{3}$

$\Rightarrow \quad a_1^3=8$

$\Rightarrow \quad a_1=2$

2	3	-26	52	-24
	0	6	-40	24
	3	-20	12	0



இருபடி சமன்பாடு

$3x^2-20x+12=0$

$\Rightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)(x-6)=0$

$\Rightarrow x=\frac{2}{3},6$

மூலங்கள் : $\frac{2}{3},2\,,6$

6.பின்வரும் .முப்படி சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க:

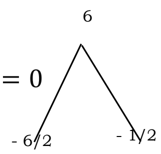
(i) $2x^3 - 9x^2 + 10x = 3$ (ii) $8x^3 - 2x^2 - 7x + 3 = 0$

<u>தீர்வு :</u> (i) $2x^3 - 9x^2 + 10x = 3$

$2 + (-9) + 10 + (-3) = 12 - 12 = 0$

$$2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -9 & 10 & -3 \\ & 0 & 2 & -7 & 3 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$



இருபடி சமன்பாடு $2x^2 - 7x + 3 = 0$

$(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \quad x = 3, x = \frac{1}{2}$

மூலங்கள் : $1, 3, \frac{1}{2}$

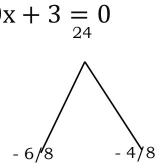
(ii) $8x^3 - 2x^2 - 7x + 3 = 0$

$8 + (-2) + (-7) + 3 = 11 - 9 = 2 \neq 0$

ஆனால் $8 + (-7) = 1 \qquad -2 + 3 = 1$

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 8 & -2 & -7 & 3 \\ & 0 & -8 & 10 & -3 \\ \hline & 8 & -10 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

இருபடி சமன்பாடு $8x^2 - 10x + 3 = 0$



$\Rightarrow \left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$

$x = \frac{3}{4} \quad x = \frac{1}{2}$

மூலங்கள் : $-1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$

பயிற்சி: 3.5

1 (i) பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க :

$\sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0.$

<u>தீர்வு</u> :$\sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0$ பிரதியிடு $t = \sin x$

$\therefore t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t-4)(t-1) = 0$

$\Rightarrow t - 4 = 0 \qquad t - 1 = 0$

$\Rightarrow t = 4 \qquad t = 1$

$\Rightarrow \sin x = 4 \qquad \sin x = 1$

தீர்வு இல்லை $\quad \sin x = \sin\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2} \quad n \in$ x .

---

(1) (ii): $12x^3 + 8x = 29x^2 - 4$

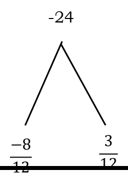
<u>தீர்வு :</u> $12x^3 + 8x = 29x^2 - 4 \Rightarrow 12x^3 - 29x^2 + 8x + 4 = 0$

1 மற்றும் -1 மேலே உள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் அல்ல

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 12 & -29 & 8 & 4 \\ & 0 & 24 & -10 & -4 \\ \hline & 12 & -5 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

இருபடி சமன்பாடு :$12x^2 - 5x - 2 = 0$

$\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right) = 0$



$\Rightarrow x - \frac{2}{3} = 0 \qquad x + \frac{1}{4} = 0$

$x = \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}$

மூலங்கள் : $2, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}$.

---

2 (i). விகிதமுறு மூலங்கள் உள்ளதா என ஆராய்க. : $2x^3 - x^2 - 1 = 0$

<u>தீர்வு</u> : கெழுக்களின் கூடுதல் = 2 – 1 – 1 = 0

x = 1 என்பது ஒரு மூலம்

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ & 0 & 2 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore$ x = 1 ஒரு மூலம் மற்றும் மீதியிருக்கும் காரணி

$2x^2 + x + 1 = 0 \qquad X = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

x = 1 என்பது ஒரு விகிதமுறு மூலம்

---

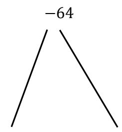
(3): தீர்க்க: $8x^{3/2n} - 8x^{-3/2n} = 63$

<u>தீர்வு :</u> $8x^{3/2n} - 8 \cdot x^{-3/2n} = 63$

பிரதியிடு $t = x^{3/2n} \Rightarrow 8t - 8 \cdot t^{-1} = 63 \Rightarrow 8t - \frac{8}{t} = 63$

$\Rightarrow 8t^2 - 8 = 63t$

$\Rightarrow 8t^2 - 63t - 8 = 0$



$\Rightarrow (t-8)\left(t+\frac{1}{8}\right) = 0$

$\Rightarrow t - 8 = 0 \qquad t + \frac{1}{8} = 0$

$\Rightarrow t = 8 \qquad t = -\frac{1}{8}$

$\Rightarrow x^{3/2n} = 2^3 \qquad x^{3/2n} = \left(\frac{-1}{2}\right)^3$

$\Rightarrow x = (2^3)^{\frac{2n}{3}} \qquad x = \left[\left(\frac{-1}{2}\right)^3\right]^{\frac{2n}{3}}$

$= 2^{2n} = 4^n \qquad x = \left(\frac{-1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{4^n}$

<u>(4):</u> தீர்க்க:

$2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}.$

<u>தீர்வு</u> : $2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$

$2t + 3 \cdot \frac{1}{t} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b} \qquad t = \sqrt{\frac{x}{a}}$

$\Rightarrow 2t^2 + 3 = \left(\frac{b}{a} + \frac{6a}{b}\right) \cdot t \qquad \frac{1}{t} = \sqrt{\frac{a}{x}}$

$\Rightarrow 2t^2 - \left(\frac{b}{a} + \frac{6a}{b}\right)t + 3 = 0$

$\Rightarrow 2t^2 - \frac{b}{a}t - \frac{6a}{b}t + 3 = 0 \Rightarrow t\left(2t - \frac{b}{a}\right) - \frac{3a}{b}\left(2t - \frac{b}{a}\right) = 0$

$\Rightarrow \left(t - \frac{3a}{b}\right)\left(2t - \frac{b}{a}\right) = 0 \quad \Rightarrow t - \frac{3a}{b} = 0 \qquad 2t - \frac{b}{a} = 0$

$\Rightarrow t = \frac{3a}{b} \qquad 2t = \frac{b}{a}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{3a}{b} \qquad \sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{b}{2a}$

$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{9a^2}{b^2} \qquad \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$

$\Rightarrow x = \frac{9a^3}{b^2} \qquad \Rightarrow x = \frac{b^2}{4a}$

$\therefore$ <u>தீர்வு</u> : $\frac{9a^3}{b^2}, \frac{b^2}{4a}$

5(ii) சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க:
$\mathbf{x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0}$

தீர்வு :

$x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$

1	1	3	0	-3	-1
	0	1	4	4	1
-1	1	4	4	1	0
	0	-1	-3	-1	
	1	3	1	0	

இருபடி சமன்பாடு $x^2 + 3x + 1 = 0$

$[\ X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ]$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

மூலங்கள் : $1\ ,\ -1\ ,\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\ ,\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

(6): $\mathbf{4^x - 3(2^{x+2}) + 2^5 = 0}$ எனும் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் அனைத்து மெய்யெண்களையும் காண்க.

தீர்வு :

$4^x - 3(2^{x+2}) + 2^5 = 0$
$(2^2)^x - 3 \cdot 2^x \cdot 2^2 + 32 = 0$
$(2^x)^2 - 3(4) \cdot 2^x + 32 = 0$
பிரதியிடு $2^x = t \Rightarrow t^2 - 12t + 32 = 0$
$\Rightarrow\ (t-8)(t-4) = 0$
$\Rightarrow\ t - 8 = 0 \quad t - 4 = 0$
$\Rightarrow\ t = 8 \qquad t = 4$
$\Rightarrow\ 2^x = 2^3 \qquad 2^x = 2^2$
$\Rightarrow\ x = 3 \qquad x = 2$

அத்தியாயம் 5
இரு பரிமாண பகுமுறை வடிவியல்
5 - மதிப்பெண்கள் மட்டும்

Ex 5.1 - 6. $(1,0), (-1,0)$ மற்றும் $(0,1)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

Solution :

வட்டத்தின் சமன்பாடானது
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ---(1)
(1,0) வழி (1) செல்கிறது
$\Rightarrow 1 + 0 + 2g(1) + 2f(0) + c = 0$
$\Rightarrow 2\,g + c = -1$.. ----(2)
$(-1,0)$ வழி (1) செல்கிறது
$\Rightarrow (-1)^2 + 0 + 2g(-1) + 2f(0) + c = 0$
$\Rightarrow -2g + c = -1$...(3)
மேலும் (0,1) வழி (1) செல்கிறது
$\Rightarrow 0 + 1^2 + 2g(0) + 2f(1) + c = 0$
$\Rightarrow 2f + c = -1$...(4)
(2) +(3) $\Rightarrow 2c = -2$
$\Rightarrow c = -1$
c = -1 என (2) ல் பிரதியிட கிடைப்பது
$2g - 1 = -1$
$\Rightarrow 2g = 0$
$\Rightarrow g = 0$
$c = -1$ என (4) பிரதயிட கிடைப்பது
$2f - 1 = -1$
$\Rightarrow 2f = 0$
$\Rightarrow f = 0$
$\therefore$ (1) லிருந்து
$x^2 + y^2 + 0 + 0 - 1 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

எடுத்துக்காட்டு 5.10

$(1,1), (2,-1)$, மற்றும் $(3,2)$ என்ற மூன்று புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

Solution :

வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ----(1)
இது (1,1), $(2,-1)$ மற்றும் (3,2) என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்வதால்
$2g + 2f + c = -2$ ----(2)
$4g - 2f + c = -5$ --------(3)
$6g + 4f + c = -13$-----(4)
(2) - (3)-இலிருந்து $-2g + 4f = 3$. ----(5)
(4) - (3)-இலிருந்து $2g + 6f = -8$. -----(6)
(5) + (6)-இலிருந்து $f = -\frac{1}{2}$ என கிடைக்கும் மதிப்பை (6)இல் பிரதியிட $g = \frac{-5}{2}$, f, g இன் மதிப்புகளை (2)இல் பிரதியிட $c = 4$ எனவும் கிடைக்கிறது.
எனவே தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு
$x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{5}{2}\right)x + 2\left(-\frac{1}{2}\right)y + 4 = 0$
அதாவது $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 5.17: $\mathbf{x^2-4x-5y-1=0}$ **என்ற பரவளையத்தின் முனை, குவியம், இயக்குவரை மற்றும் செவ்வகல, நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க.**

தீர்வு

$x^2-4x-5y-1=0$

$x^2-4x=5y+1$
$x^2-4x+4=5y+4+1$
$(x-2)^2=5y+5$
$(x-2)^2=5(y+1)$

$X=x-2 \quad Y=y+1 \quad 4a=5 \Rightarrow a=\frac{5}{4}$

$X^2=5y$

பரவளையம் மேற் பக்க திறப்புடையது

முனை(0,0) = $(2,-1)$=(h,k) { x-2 = 0; y+1 = 0}

குவியம் (0,a) $=\left(2,-1+\frac{5}{4}\right)=\left(2,\frac{1}{4}\right)$

இயக்குவரை சமன்பாடு: Y = -a

$y+1=-\frac{5}{4} \Rightarrow y=-1-\frac{5}{4}=-\frac{9}{4} \Rightarrow y=-\frac{9}{4}$

செவ்வகல சமன்பாடு Y = a:

$y+1=\frac{5}{4} \Rightarrow y=-1+\frac{5}{4}=\frac{1}{4} \Rightarrow y=\frac{1}{4}$

செவ்வகல நீளம்= 4a = 5

Ex 5.2 4(iv)

$\mathbf{x^2-2x+8y+17=0}$ **பரவளையத்தின் முனை, குவியம், இயக்குவரை மற்றும் செவ்வகல, நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க.**

தீர்வு

$x^2-2x+8y+17=0$

$x^2-2x=-8y-17$

$x^2-2x+1=-8y-17+1$

$(x-1)^2=-8y-16$

$(x-1)^2=-8(y+2)$

$X=x-1 \quad Y=y+2 \quad 4a=8 \Rightarrow a=2$

$X^2=-8Y$

பரவளையம் கீழ் பக்க திறப்புடையது

முனை(0,0) = (1,-2)=(h,k) { $x-1=0,\ y+2=0$}

குவியம்$(0,-a)$ $(h+0,k-a)$ $=(1,-4)$ { 1+0=1, -2-2=-4}

செவ்வகல சமன்பாடு (Y = -a) : $y+2=-2 \Rightarrow y=-4$

இயக்குவரை சமன்பாடு $Y=a$: $y+2=2 \Rightarrow y=0$

செவ்வகல நீளம் $4a=8$

Ex 5.2 4(v)

பின்வரும் பரவளையத்தின் முனை, குவியம், இயக்குவரை மற்றும் செவ்வகல,நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க $\mathbf{y^2-4y-8x+12=0}$

தீர்வு

$y^2-4y-8x+12=0$

$y^2-4y=8x-12$

$y^2-4y+4=8x-12+4$

$(y-2)^2=8x-8$

$(y-2)^2=8(x-1)$

$Y^2=8X \quad [X=x-1 \quad Y=y-2 \quad 4a=8 \Rightarrow a=2]$

பரவளையம் வலது பக்க திறப்புடையது

முனை(0,0) =(1,2)=(h,k) $\{x-1=0, x=-1; y-2=0, y=2\}$

குவியம் $(a,0)$ $=(3,2)$ {$h+a=$ 1+2, $k+0=$ 2+0 }

இயக்குவரை சமன்பாடு : X =- a

$x-1=-2 \quad x=-2+1=-1 \quad x=-1$

செவ்வகல நீளம் $4a=8$

---

created:

$\mathbf{x^2+2x-2y-3=0}$ **பரவளையத்தின் முனை, குவியம், இயக்குவரை மற்றும் செவ்வகல, நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க.**

தீர்வு

$x^2+2x-3y-3=0$

$x^2+2x=2y+3$

$x^2+2x+1=2y+3+1$

$(x+1)^2=2y+4$

$(x+1)^2=2(y+2)$

$X^2=2Y \ \{X=x-1 \quad Y=y+2 \quad 4a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}\}$

$X^2=4aY$

பரவளையம் மேற் பக்க திறப்புடையது

முனை(0,0) =(-1,-2)=(h,k) { $x+1=0,; y+2=0$ }

குவியம் $(h+0,k+a)$ $=\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$ {h+0=-1+0; k+a= -2+$\frac{1}{2}=\frac{-4+1}{2}=\frac{-3}{2}$}

இயக்குவரை சமன்பாடு : Y = -a

$y+2=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2} \Rightarrow y=-\frac{5}{2}$

செவ்வகல சமன்பாடு Y= a:

$y+2=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$

செவ்வகல நீளம் $4a=4(\frac{1}{2})=2$

எடுத்துக்காட்டு 5.20: $\mathbf{4x^2+36y^2+40x-288y+532=0}$ **என்ற கூம்பு வளைவின் குவியங்கள், முனைகள் மற்றும் அதன் நெட்டச்சு, குற்றச்சு நீளங்களைக் காண்க.**

தீர்வு : இது நீள்வட்டத்தை குறிக்கும்

$4x^2+36y^2+40x-288y+532=0$

$4x^2+40x+36y^2-288y=-532$

$4(x^2+10x)+36(y^2-8y)=-532$

$4(x^2+10x+25)+36(y^2-8y+16)=-532+100+576$

$4(x+5)^2+36(y-4)^2=144$

$\div 144 \quad \frac{4(x+5)^2}{144}+\frac{36(y-4)^2}{144}=1$

$\frac{(x+5)^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$ நெட்டச்சு X-அச்சு :

$X=x+5 \qquad Y=y-4$

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$, $\{a^2=36 \Rightarrow a=6 \quad b^2=4 \Rightarrow b=2\}$

$c^2=a^2-b^2=36-4=32$, $c=\sqrt{32}$

மையம் $(-5,4)$ $\{X+5=0 \Rightarrow X=-5;\ Y-4=0 \Rightarrow Y=4\}$

குவியங்கள்: $(h\pm c, k) = (-5\pm4\sqrt{2},4)$

i.e. $(-5+4\sqrt{2},4)(-5-4\sqrt{2},4)$.

முனைகள்$(h\pm a, k)$: $(-5\pm6,4)$ i.e $(1,4);(-11,4)$

நெட்டச்சுநீளம் $=2a=2(6)=12$

குற்றச்சுநீளம் $=2b=2(2)=4$.

எடுத்துக்காட்டு 5.21: $\mathbf{4x^2+y^2+24x-2y+21=0}$ **என்ற நீள்வட்டத்தின் மையம், முனைகள் மற்றும் குவியங்கள் காண்க. மேலும் செவ்வகல நீளம் 2 என நிறுவுக.**

தீர்வு : இது நீள்வட்டத்தை குறிக்கும்

$4x^2+y^2+24x-2y+21=0 \Rightarrow 4x^2+24x+y^2-2y=-21$

$4(x^2+6x)+1(y^2-2y)=-21$

$4(x^2+6x+9)+1(y^2-2y+1)=-21+36+1=16$

$4(x+3)^2+(y-1)^2=16$

$\div 16 \quad \frac{4(x+3)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$

$X=x+3 \quad Y=y-1$

$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{16}=1$ நெட்டச்சு Y-அச்சு

$a^2=16 \quad a=4 \quad b^2=4 \quad b=2$

$c^2=a^2-b^2=16-4=12 \Rightarrow c=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

மையம்$(0,0)$ = $(-3,1)$

முனைகள் $(h\pm a, k)$: $(-3,1\pm4)=(-3,3);(-3,-3)$

குவியங்கள் $(h\pm c, k)$: $(-3,1\pm2\sqrt{3})$

$=(-3,1+2\sqrt{3})\ ;\ (-3,1-2\sqrt{3})$

நெட்டச்சுநீளம் $2a=8$

குற்றச்சுநீளம் $2b=2(2)=4$

செவ்வகல நீளம் $=2\frac{b^2}{a}=2\frac{4}{4}=2$

EXERCISE 5.2 - 8(5) பின்வரும் சமன்பாடுகளின் கூம்பு வளைவின் வகையைக் கண்டறிந்து அவற்றின் மையம் , குவியங்கள், முனைகள் மற்றும் இயக்குவரைகளைக் காண்க :
$\mathbf{18x^2+12y^2-144x+48y+120=0}$

தீர்வு : இது நீள்வட்டத்தை குறிக்கும்

$18x^2+12y^2-144x+48y+120=0$

$18x^2+12y^2-144x+48y=-120$

$18(x^2-8x)+12(y^2+4y)=-120$

$18(x^2-8x+16)+12(y^2+4y+4)=-120+288+48=216$

$\div 216 \quad \frac{18(x-4)^2}{216}+\frac{12(y+2)^2}{216}=1$

$\frac{(x-4)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{18}=1 \quad X=x-4 \quad Y=y+2$

$\frac{X^2}{12}+\frac{Y^2}{18}=1$ நெட்டச்சு Y-அச்சு

$(a^2=18,\ a=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\ \&\ b^2=12 \quad b=\sqrt{12}=2\sqrt{3})$

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{18-12}=\sqrt{6}$

$\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\frac{18}{\sqrt{6}}=\frac{3.\sqrt{6}.\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=3\sqrt{6}$

மையம் $(4,-2)$

முனைகள் $(h, k\pm a)=(4,-2\pm3\sqrt{2})$

$=(4,-2+3\sqrt{2});(4,-2-3\sqrt{2})$

குவியங்கள்:$(h, k\pm c)=(4,-2\pm\sqrt{6})$

$=(4,-2+\sqrt{6});(4,-2-\sqrt{6})$

இயக்குவரை சமன்பாடு $Y=\pm\frac{a}{e} \Rightarrow y+2=\pm3\sqrt{6}$

i.e $y=-2+3\sqrt{6}$, $y=-2-3\sqrt{6}$

கூம்பு வளைவின் வகையைக் கண்டறிந்து அவற்றின் மையம் , குவியங்கள், முனைகள் மற்றும் இயக்குவரைகளைக் காண்க
$\mathbf{36x^2+4y^2-72x+32y-44=0}$

தீர்வு : இது நீள்வட்டத்தை குறிக்கும்

$36x^2+4y^2-72x+32y-44=0$

$36x^2-72x+4y^2+32y=44$

$36(x^2-2x)+4(y^2+8y)=44$

$36(x^2-2x+1)+4(y^2+8y+16)=44+36+64=144$

$\div 225 \quad \frac{36(x-1)^2}{144}+4\frac{(y+4)^2}{144}=1$

$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+4)^2}{36}=1 \quad X=x-1 \quad Y=y+4$

$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{36}=1$ நெட்டச்சு Y-அச்சு

$\{a^2=36 \Rightarrow a=6\ \&\ b^2=4 \Rightarrow b=2\}$

$c^2=a^2-b^2=36-4=32 \Rightarrow c=\pm\sqrt{32}=\pm\sqrt{4x4x2}=\pm4\sqrt{2}$

மையம்$=(1,-4)$

முனைகள் $(h, k\pm a)=(1,-4\pm6)$

$=(1,-4+6),(1,-4-6)=(1,2),(1,-10)$

குவியங்கள் $(h, k\pm c)=(1,-4\pm\sqrt{32})$

$=(1,-4+4\sqrt{2});(1,-4-4\sqrt{2})$

$e=\frac{c}{a}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Eg 5.24

$\mathbf{11x^2 - 25y^2 - 44x + 50y - 256 = 0}$ **என்ற அதிபரவளையத்தின் மையம், குவியங்கள் மற்றும் மையத் தொலைத்தகவு காண்க.**

<u>*தீர்வு*</u>

$11x^2 - 25y^2 - 44x + 50y - 256 = 0$
$11x^2 - 44x - 25y^2 + 50y = 256$
$11(x^2 - 4x) - 25(y^2 - 2y) = 256$
$11(x^2 - 4x + 4) - 25(y^2 - 2y + 1) = 256 + 44 - 25$
$11(x-2)^2 - 25(y-1)^2 = 275$

$\div 275 \quad \frac{11(x-2)^2}{275} - \frac{25(y-1)^2}{275} = 1$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{11} = 1 \quad X = x-2 \quad Y = y-1$

$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ & $b^2 = 11 \quad b = \sqrt{11}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 11 = 36 \Rightarrow c = \pm 6$

மையம் $= (2,1)$

குவியங்கள் $(h \pm ae, k) = (2 \pm 6, 1) = (2+6,1); (2-6,1)$

$= (8,1)(-4,1)$

மையத் தொலைத்தகவு $= e = \frac{c}{a} = \frac{6}{5}$

Ex 5.4 (3)

$\mathbf{x - y + 4 = 0}$ **என்ற நேர்க்கோடு** $\mathbf{x^2 + 3y^2 = 12}$ **என்ற நீள்வட்டத்தின் தொடுகோடு என நிறுவுக. மேலும் தொடும் புள்ளியைக் காண்க.**

<u>*தீர்வு*</u>

$x - y + 4 = 0 \qquad x^2 + 3y^2 = 12$

$-y = -x - 4 \qquad \frac{x^2}{12} + \frac{3y^2}{12} = 1$

$\Rightarrow y = x + 4 \qquad \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

$m = 1 \quad c = 4$

$a^2 = 12 \quad b^2 = 4$

நிபந்தனை $c^2 = a^2m^2 + b^2$

L.H.S $\quad c^2 = 4^2 = 16$

R.H.S: $\quad a^2m^2 + b^2 = 12(1) + 4 = 12 + 4 = 16$

L.H.S=R.H.S

∴கோடு தொடு கோடாக அமையும்

தொடும் புள்ளி $= \left(-\frac{a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$

$= \left(-\frac{12(1)}{4}, \frac{4}{4}\right) = (-3,1)$

Ex 5.2 8(vi)

கூம்பு வளைவின் வகையைக் கண்டறிந்து அவற்றின் மையம் , குவியங்கள், முனைகள் மற்றும் இயக்குவரைகளைக் காண்க

$\mathbf{9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0}$

<u>*தீர்வு*</u>

$9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$
$9x^2 - 36x - y^2 - 6y = -18$
$9(x^2 - 4x) - (y^2 + 6y) = -18$
$9(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 6y + 9) = -18 + 36 - 9$
$9(x-2)^2 - (y+3)^2 = 9$

$\div 9 \quad \frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1 \quad X = x-2 \quad Y = y+3$

$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1$

$\{a^2 = 1 \Rightarrow a = 1\ ;\ b^2 = 9 \Rightarrow b = 3\}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 9 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$

மையம் $= (2,-3)$

முனைகள் $(h \pm a, k) = (2 \pm 1, -3) = (2+1,-3); (2-1,-3)$

$= (3, -3);(1, -3)$

குவியங்கள் $(h \pm a, k) = (2 \pm \sqrt{10}, -3) = (2+\sqrt{10}, -3);(2-\sqrt{10}, -3)$

இயக்குவரை சமன்பாடு $X = \pm \frac{a}{e}$: $\quad \{\frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} = \frac{1}{\sqrt{10}}\}$

$x - 2 = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow x = 2 + \frac{1}{\sqrt{10}}$, $x = 2 - \frac{1}{\sqrt{10}}$

CREATED.

$\mathbf{5x + 12y = 9}$ **என்ற நேர்க்கோடு** $\mathbf{x^2 - 9y^2 = 9}$ **தொடுகோடு என நிறுவுக. மேலும் தொடும் புள்ளியைக் காண்க.**

<u>*தீர்வு*</u>

$5x + 12y = 9 \qquad x^2 - 9y^2 = 9$

$\Rightarrow 12y = -5x + 9 \qquad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$

$\Rightarrow y = \frac{-5}{12}x + \frac{9}{12} \qquad a^2 = 9 \quad b^2 = 1$

$\Rightarrow y = \frac{-5}{12}x + \frac{3}{4} \qquad m = -\frac{5}{12} \quad c = \frac{3}{4}$

நிபந்தனை : $c^2 = a^2m^2 - b^2$

L.H.S: $c^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

R.H.S: $a^2m^2 - b^2 = 9\left(\frac{-5}{12}\right)^2 - 1 = 9\left(\frac{25}{144}\right) - 1$

$= \frac{225-144}{144} = \frac{81}{144} = \frac{9}{16}$

LHS=RHS கோடு தொடு கோடாக அமையும்

தொடும் புள்ளி $= \left(-\frac{a^2m}{c}, -\frac{b^2}{c}\right)$

$= \left(\frac{-9\left(-\frac{5}{12}\right)}{\frac{3}{4}}, \frac{-1}{\frac{3}{4}}\right) = \left(5, -\frac{4}{3}\right)$

பயிற்சி : **5.5.(1)**

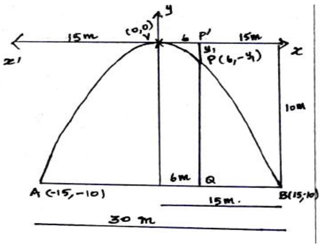
ஒரு பாலம் பரவளைய வளைவில் உள்ளது. மையத்தில் 10மீ உயரமும், அடிப்பகுதியில் 30மீ அகலமும் உள்ளது. மையத்திலிருந்து இரு புறமும் 6 மீ தூரத்தில் பாலத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : பரவளையம் கீழ் நோக்கி திறப்புடையது

முனை $(0,0)$

சமன்பாடு $x^2 = -4ay$

Pt $B(15,-10)$



$\therefore (15)^2 = -4a(-10) \Rightarrow 225 = 4a(10) \Rightarrow 4a = \frac{225}{10}$

$\therefore$ சமன்பாடு $x^2 = -\frac{225}{10}y$

$\Rightarrow x^2 = -\frac{45}{2}y$

மையத்திலிருந்து 6 மீ தூரத்தில் பாலத்தின் உயரம்= PQ

$PP' = y_1$

$\therefore P(6,-y_1)$:

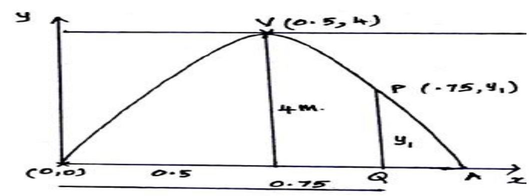
$x^2 = -\frac{45}{2}y \Rightarrow 6^2 = -\frac{45}{2}(-y_1) \Rightarrow y_1 = \frac{2\times 36}{45} = \frac{8}{5} = 1.6$ m

$\therefore$ உயரம் = 10-y_1 $= 10 - 1.6 = 8.4$ m

பயிற்சி **5.5.(3)**

ஒரு நீரூற்றில் , ஆதியிலிருந்து 0.5மீ கிடை மட்டத் தூரத்தில் நீரின் அதிகபட்ச உயரம் 4மீ , நீரின் பாதை ஒரு பரவளையம் எனில் ஆதியிலிருந்து 0.75மீ கிடை மட்டத் தூரத்தில் நீரின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு



முனை $V(0.5,4)$= (h,k)

பரவளையம் கீழ் நோக்கி திறப்புடையது

சமன்பாடு: $(x-h)^2 = -4a(y-k) \Rightarrow (x-0.5)^2 = -4a(y-4$

(0,0) பரவளையத்தில் அமைகிறது

$(0-0.5)^2 = -4a(0-4) \Rightarrow (-0.5)^2 = 4a(4) \Rightarrow 4a = \frac{0.25}{4}$

$\therefore$ சமன்பாடு: $(x-0.5)^2 = -\frac{0.25}{4}(y-4)$

Let $OQ = 0.75$ $PQ = y_1$; $\therefore$

$P(0.75, y_1)$பரவளையத்தில் அமைகிறது

$(x-0.5)^2 = -\frac{0.25}{4}(y-4)$

$(0.75-0.5)^2 = \frac{-0.25}{4}(y_1-4) \Rightarrow (0.25)^2 = -\frac{0.25}{4}(y_1-4)$

$y_1 - 4 = \frac{-4\times(0.25)^2}{0.25}$

$y_1 - 4 = -4\times 0.25 = -1$

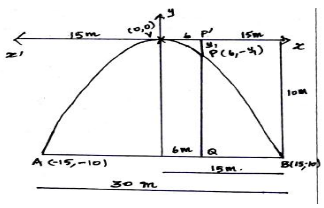
நீரின் உயரம் $= y_1 = -1+4 = 3$m .

பயிற்சி **5.5(8): தரைமட்டத்திலிருந்து 7.5மீ உயரத்தில் தரைக்கு இணையாகப் பொருத்தப்பட்ட ஒரு குழாயிலிருந்து வெளியேறும் நீர்தரையைத் தொடும் பாதை ஒரு பரவளையத்தை ஏற்படுத்துகிறது. மேலும் இந்தப் பரவளையப் பாதையின் முனை குழாயின் வாயில் அமைகிறது. குழாய் மட்டத்திற்கு 2.5மீ கீழே நீரின் பாய்வானது குழாயின் முனை வழியாகச் செல்லும் நிலை குத்துக் கோட்டிற்கு 3மீ தூரத்தில் உள்ளது. எனில் குத்துக்கோட்டிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திற்கு அப்பால் நீரானது தரையில் விழும் என்பதைக் காண்க.**

தீர்வு : பரவளையம் கீழ் நோக்கி திறப்புடையது

முனை $V(0,0)$

சமன்பாடு $x^2 = -4ay$ $-(1)$;



$VP' = 3$ m , $VQ = 2.5$

$\therefore P(3,-2.5)$

(1)$\Rightarrow$ $3^2 = -4a(-2.5)$

$9 = 4a(2.5) \Rightarrow 4a = \frac{9}{2.5}$

$\therefore$ (1) $x^2 = -\left(\frac{9}{2.5}\right)y$

$AC = x_1$

$\therefore A(x_1,-7.5)$பரவளையத்தில் அமைகிறது

$\therefore x_1^2 = -\left(\frac{9}{2.5}\right)(-7.5) \Rightarrow x_1^2 = -9(-3)$

$x_1^2 = 27 \Rightarrow x_1^2 = \sqrt{27} = \sqrt{3X3X3} = 3\sqrt{3}$ m

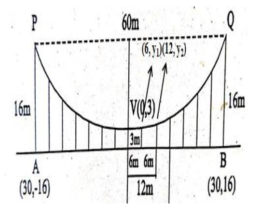
பயிற்சி **5.5 (5)**

ஒரு தொங்கு பாலத்தின் 60மீ சாலைப் பகுதிக்கு பரவளைய கம்பி வடம் படத்தில் உள்ளவாறு பொறுத்தப்பட்டுள்ளது. செங்குத்துக் கம்பி வடங்கள் சாலைப் பகுதியில் ஒவ்வொன்றுக்கும் 6மீ இடைவெளி இருக்குமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. முனையிலிருந்து முதல் இரண்டு செங்குத்து கம்பி வடங்களுக்கான நீளத்தைக்காண்க.

தீர்வு

பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$(x-h)^2 = 4a(y-k)$



ஆனால் $v(0,3)$

$x^2 = 4a(y-3)$

(30,16) யை (1) ல் பிரதியிட

$(30)^2 = 4a(16-3)$

$900 = 13\times 4a \Rightarrow \frac{900}{13\times 4} = a$

$(1) \Rightarrow x^2 = 4\left[\frac{900}{13\times 4}\right](y-3)$

$x^2 = 4\left[\frac{900}{13}\right](y-3)$

$(6, y_1)$ யை (2) ல் பிரதியிட

$\Rightarrow (6)^2 = \frac{900}{13}(y_1-3) \Rightarrow \frac{36\times 13}{900} = y_1 - 3$

$0.52 = y_1 - 3 \Rightarrow y_1 = 3.52$m

$(12, y_2)$ யை (2) ல் பிரதியிட(2) $\Rightarrow (12)^2 = \frac{900}{13}(y_2-3)$

$\frac{144\times 13}{900} = y_2 - 3$

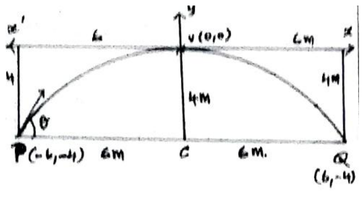
$\Rightarrow 2.08 = y_2 - 3$

$\Rightarrow y_2 = 5.08$m

பயிற்சி 5.5(9) **ஒரு ராக்கெட் வெடியானது கொளுத்தும் போது அது ஒரு பரவளையப் பாதையில் செல்கிறது. அதன் உச்ச உயரம் 4மீ-ஐ எட்டும் போது அது கொளுத்தப்பட்ட இடத்திலிருந்து கிடைமட்டத் தூரம் 6மீ தொலைவிலுள்ளது. இறுதியாக கிடைமட்டமாக 12மீ தொலைவில் தரையை வந்தடைகிறது. எனில் புறப்பட்ட இடத்தில் தரையுடன் ஏற்படுத்தப்படும் எறிகோணம் காண்க.**

தீர்வு :முனை V(0,0) பரவளையம் கீழ் நோக்கி திறப்புடையது

$\therefore\ x^2 = -4ay \quad -(1)$



$PC = 6\text{ m} \quad VC = 4\text{ m}$

$\therefore P(-6, -4)$

$\therefore (-6)^2 = -4a(-4)$

$\Rightarrow\ 36 = 4a(4)$

$4a = \frac{36}{4} = 9 \ \Rightarrow\ x^2 = -9y \quad$ -(2)

எறிகோணம் = θ

$2x = -9\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{9}$

$\Rightarrow m = \tan\theta = \frac{dy}{dx}$ at $(-6, -4) \Rightarrow \tan\theta = \frac{-2(-6)}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

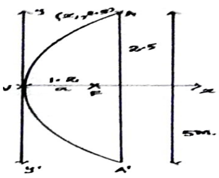
∴எறிகோணம் $\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

பயிற்சி 5.5 (4) : **பொறியாளர் ஒருவர் குறுக்கு வெட்டு பரவளையமாக உள்ள ஒரு துணைக்கோள் ஏற்பியை வடிவமைக்கின்றார். ஏற்பி அதன் மேல் பக்கத்தில் 5மீ அகலமும், முனையிலிருந்து குவியம் 1.2 மீ தூரத்திலும் உள்ளது.**

(a) முனையை ஆதியாகவும், x-அச்சு பரவளையத்தின் சமச்சீர் அச்சாகவும் கொண்டு ஆய அச்சுகளைப் பொருத்தி பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(b) முனையிலிருந்து செயற்கைக்கோள் ஏற்பியின் ஆழம் காண்க.

தீர்வு :பரவளையம் வலது பக்க திறப்புடையது



முனை V(0, θ)

சமன்பாடு: $y^2 = 4ax; \quad a = 1.2$

$\therefore y^2 = 4(1.2)x \Rightarrow y^2 = 4.8x$

ஆழம் = x_1

A $(x_1, 2.5)$பரவளையத்தில் அமைகிறது

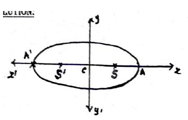
$(2.5)^2 = 4.8x_1 \therefore \quad x_1 = \frac{6.25}{4.8} = 1.3$ m.

எடுத்துக்காட்டு 5.32

சூரியனிலிருந்து பூமியின் அதிகபட்சம் மற்றும் குறைந்தபட்ச தூரங்கள் முறையே 152×10^6 கி.மீ மற்றும் 94.5×10^6 கி.மீ. நீள்வட்டப் பாதையின் ஒரு குவியத்தில் சூரியன் உள்ளது . சூரியனுக்கும் மற்றொரு குவியத்திற்குமான தூரம் காண்க.

தீர்வு :

குறைந்தபட்சதூரம் $= SA = 94.5 \times 10^6$



$\Rightarrow CA - CS = 94.5 \times 10^6$

$\Rightarrow a - ae = 94.5 \times 10^6$

அதிகபட்ச தூரம் $= SA' = 152 \times 10^6$

$\Rightarrow CA' + CS = 152 \times 10^6$

$\Rightarrow a + ae = 152 \times 10^6$

$a + ae = 152 \times 10^6$

$a - ae = 94.5 \times 10^6 \ \Rightarrow 2ae = 57.5 \times 10^6$

சூரியனுக்கும் மற்றொரு குவியத்திற்குமான தூரம் 575×10^5km

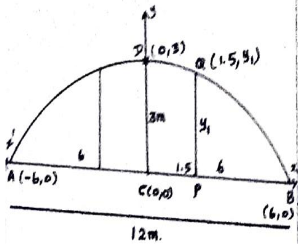
எடுத்துக்காட்டு 5.31

ஒரு வழிப்பாதையில் உள்ள அரை நீள்வட்ட வளைவின் உயரம் 3 மீ மற்றும் அகலம் 12 மீ. ஒரு சரக்கு வாகனத்தின் அகலம் 3 மீ மற்றும் உயரம் 2.7 மீ எனில் இந்த வாகனம் வளைவின் வழி செல்ல முடியுமா?

தீர்வு

மையம் (0,0)

சமன்பாடு : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad$ - (1)



$AB = 2a = 12 \quad \Rightarrow a = b$

$CD = b = 3$

$\therefore (1) \Rightarrow \frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$

i.e Q $(1.5, y_1)$ நீள் வட்டத்தில்

அமைகிறது

$\Rightarrow \quad \frac{(1.5)^2}{36} + \frac{y_1^2}{9} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{y_1^2}{9} = 1 - \frac{2.25}{36}$

$\frac{y_1^2}{9} = \frac{36 - 2.25}{36} \ = \frac{33.75}{36} \ \Rightarrow \quad y_1^2 = \frac{33.75}{36} \times 9 = \frac{33.75}{4}$

$y_1^2 = 8.43 \quad \Rightarrow\ y_1 = 2.9$m

∵ வாகனத்தின் உயரம் $2.7 < 2.9$ m

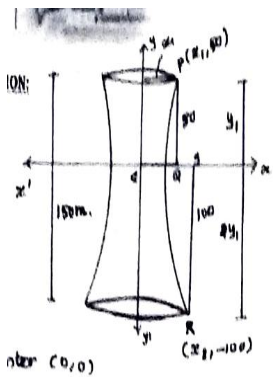
வாகனம் வளைவின் வழியே செல்லும்

பயிற்சி 5.5 (6): **ஒரு அணு உலை குளிரூட்டும் தூணின் குறுக்கு வெட்டு அதிபரவளைய வடிவில் உள்ளது. மேலும் அதன் சமன்பாடு $\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{44^2} = 1$. தூண் 150மீ உயரமுடையது. மேலும் அதிபரவளையத்தின் மையத்திலிருந்து தூணின் மேல் பகுதிக்கான தூரம் மையத்திலிருந்து அடிப்பகுதிக்கு உள்ள தூரத்தில் பாதியாக உள்ளது. தூணின் மேற்பகுதி மற்றும் அடிப்பகுதியின் விட்டங்களைக் காண்க.**

தீர்வு மையம் (0,0)

அதி பரவளைய சமன்பாடு $\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{44^2} = 1$

$y_1 + 2y_1 = 150 \ \Rightarrow\ 3y_1 = 150$



$\Rightarrow y_1 = \frac{150}{3} = 50$ m

$\therefore P(x_1, 50)$

$\frac{x_1^2}{30^2} - \frac{50^2}{44^2} = 1$

$\frac{x_1^2}{30^2} = 1 + \frac{2500}{1936}$

$\quad = \frac{1936+2500}{1936} = \frac{4456}{1936}$

$x_1^2 = \frac{30^2}{44^2}(4436) \Rightarrow$

$x_1 \ = \frac{30}{44}\sqrt{4436} = 45.41$

மேற்புற விட்டம் $= 2x_1 = 2(45.41) = 90.82$

$R(x_2, -100) \quad \frac{x_2^2}{30^2} - \frac{100^2}{44^2} = 1$ அதி பரவளையத்தில் அமைகிறது

$\frac{x_2^2}{30^2} = 1 + \frac{10000}{1936} \quad = \frac{1936+10000}{1936} = \frac{11936}{1936}$

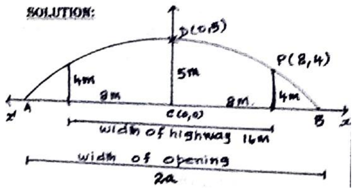
$x_2^2 = \frac{30^2}{44^2}(11936) \ \Rightarrow x_2 \ = \frac{30}{44}\sqrt{11936}$

அடிப்புற விட்டம் $= 2x_2 = 148.98$m

பயிற்சி **5.5(2): ஒரு நான்கு வழிச்சாலைக்கான மலை வழியே செல்லும் சுரங்கப்பாதையின் முகப்பு ஒரு நீள்வட்ட வடிவமாக உள்ளது. நெடுஞ்சாலையின் மொத்த அகலம் (முகப்பு அல்ல) 16மீ. சாலையின் விளிம்பில் சுரங்கப்பாதையின் உயரம், 4மீ உயரமுள்ள சரக்கு வாகனம் செல்வதற்குத் தேவையான அளவிற்கும்முகப்பின் அதிகபட்ச உயரம் 5மீ ஆகவும் இருக்க வேண்டுமெனில் சுரங்கப்பாதையின் திறப்பின் அகலம் என்னவாக இருக்க வேண்டும்?**

தீர்வு : $AB = 2a$

சுரங்கப்பாதையின்
திறப்பின் அகலம்
$AC = CB = a$
உயரம்$= b = 5$



சமன்பாடு : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{25}=1$

நெடுஞ்சாலையின் அகலம்$= 16$ m

$\therefore P(8,4) \Rightarrow \frac{8^2}{a^2}+\frac{4^2}{25}=1 \Rightarrow \frac{8^2}{a^2}=1-\frac{16}{25}=\frac{25-16}{25}=\frac{9}{25}$

$a^2=\frac{8^2\times 25}{9}=\frac{8^2\times 5^2}{3^2} \Rightarrow a=\frac{8\times 5}{3}=\frac{40}{3}=13.33\ (\because a>0)$

சுரங்கப்பாதையின் திறப்பின் அகலம்

$= 2a = 2\times 13.33 = 26.66 \approx 26.7$ m

பயிற்சி **5.5(7): 1.2 மீ நீளமுள்ள தடி அதன் முனைகள் எப்போதும் ஆய அச்சுகளைத் தொட்டுச் செல்லுமாறு நகருகின்றது. தடியின் x -அச்சு முனையிலிருந்து 0.3மீ தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி P-ன் நியமப்பாதை ஒரு நீள்வட்டம் எனநிறுவுக, மேலும் அதன் மையத் தொலைத்தகவும் காண்**

தீர்வு :

$AB = 1.2\quad AP = 0.3;\ BP = 1.2-0.3 = 0.9$

$\cos\theta = \frac{\text{அ.ப}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{x_1}{0.9}$ & $\sin\theta = \frac{\text{எ.ப.}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{y_1}{0.3}$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$\frac{x_1^2}{(0.9)^2}+\frac{y_1^2}{(0.3)^2}=1$ i.e $\frac{x_1^2}{0.81}+\frac{y_1^2}{0.09}=1$

$e=\sqrt{\frac{a^2-1^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{0.81-0.09}{0.81}}=\sqrt{\frac{0.72}{0.81}}=\sqrt{\frac{72}{81}}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

எடுத்துக்காட்டு 5.36

ஓர் ஒளியியல் கண்ணாடி அமைப்பின் நீள்வட்டப் பகுதிச் சமன்பாடு $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. அந்த அமைப்பின் பரவளையப் பகுதியின் குவியம் நீள்வட்டப் பகுதியின் வலப்பக்க குவியத்தில் உள்ளது. பரவளையத்தின் முனை ஆதிப்புள்ளியிலும், பரவளையம் வலப்பக்கம் திறப்புடையதாகவும் உள்ளது. இந்த பரவளையத்தின் சமன்பாட்டைத் தீர்மானிக்கவும்.

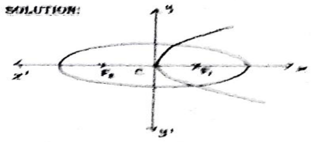
தீர்வு :$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\quad a^2=16\quad b^2=9$

$ae=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}$

Foci of ellipse are

$(\sqrt{7},0),(-\sqrt{7},0) \therefore a=\sqrt{7}$

$y^2=4ax \quad \therefore y^2=4\sqrt{7}x$



Example 5.40: இரு கடலோர காவல்படைத் தளங்கள் 600 கி.மீ. தொலைவில் A(0,0) மற்றும் B(0,600) என்ற புள்ளிகளில் அமைந்துள்ளன. P என்ற புள்ளியில் உள்ள கப்பலிலிருந்து ஆபத்திற்கான சமிக்ஞைகள் இரு தளங்களிலும் சிறிதளவு மாறுபட்ட நேரங்களில் பெறப்படுகின்றன. அவற்றிலிருந்து கப்பல், தளம் B யை விட தளம் A -க்கு 200 கி.மீ. அதிக தூரத்தில் உள்ளதாக தீர்மானிக்கப்படுகின்றது. எனவே அந்தக் கப்பல் இருக்கும் இடம் வழியாகச் செல்லும் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு

A (0,0) (0,600) Foci Center $=\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+600}{2}\right)=(0,300)$

Transverse axis y-axis Eqn : $\frac{(y-300)^2}{a^2}-\frac{(x)^2}{b^2}=1$

Given AB$= 2ae = 600 \Rightarrow ae = 300$

$|AP-BP| = 2a = 200 \Rightarrow a = 100$

$b^2=(ae)^2-a^2=300^2-100^2=90000-10000=80000$

$\therefore$ சமன்பாடு $\frac{(y-300)^2}{10000}-\frac{x^2}{80000}=1$

A , B என்ற இரு புள்ளிகள் 10கி.மீ இடைவெளியில் உள்ளன. இந்தப் புள்ளிகளில் வெவ்வேறு நேரங்களில் கேட்கப்பட்ட வெடிச் சத்தத்திலிருந்து வெடிச் சத்தம் உண்டான இடம் A என்ற புள்ளி B என்ற புள்ளியை விட 6 கி.மீ அருகாமையில் உள்ளது என நிர்ணயிக்கப்பட்டது. வெடிச் சத்தம் உண்டான இடம் ஒரு குறிப்பிட்ட வளைவரைக்கு உட்பட்டது என நிரூபித்து அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு

A மற்றும் B குவியங்கள் ஆகும்

AB = 2ae =10 $\Rightarrow$ ae =5

pஎன்பது வெடி வெடிக்கும் புள்ளி ஆகும்

$|AP-BP| = 2a = 6$

$\therefore b^2=(ae)^2-a^2=5^2-3^2=25-9=16$

p நியமப்பாதை ஒரு அதிபரவலயமாகும் $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

எடுத்துக்காட்டு 5.35

ஒரு தேடும் விளக்கு பரவளைய பிரதிபலிப்பான் கொண்டது. (குறுக்கு வெட்டு ஒரு கிண்ண வடிவம்). பரவளைய கிண்ணத்தின் விளிம்புகளுக்கு இடையே உள்ள அகலம் 40 செ.மீ மற்றும் ஆழம் 30 செ.மீ. குமிழ் குவியத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது.

(1) பிரதிபலிப்புக்குப் பயன்படுத்தப்படும் பரவளையத்தின் சமன்பாடு என்ன?

(2) ஒளி அதிகபட்சம் தூரம் தெரிவதற்கு குமிழ் பரவளையத்தின் முனையிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் பொருத்தப்பட வேண்டும்.

SOLUTION : $V_1F_1 = 14$ m $\quad V_1F_2 = 2$m

$F_1F_2 = 2ae = 14-2 = 12$m

$CF_1 = ae = 6$m

$a = 6-1 = 5m \Rightarrow a^2 = 25$

$b^2=(ae)^2-a^2=6^2-5^2$

$b^2 = 36-25 = 11$

$\therefore \frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{11}=1$

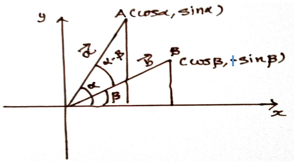
அத்தியாயம் -6 வெக்டர் இயற்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

5 - மதிப்பெண்கள் மட்டும்

பயிற்சி 6.1 (5): வெக்டர் முறையில்,

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ என நிறுவுக.

Solution:



$|\vec{a}|=|\vec{b}|= 1$

$\angle AOB = \alpha - \beta$

$A(\cos\alpha , \sin\alpha)$

$B(\cos\beta , \sin\beta)$

$\vec{a} = \cos\alpha\,\hat{i} + \sin\alpha\,\hat{j}$ & $\vec{b} = \cos\beta\,\hat{i} + \sin\beta\,\hat{j}$

$\vec{b}.\vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}|\cos(\alpha-\beta) = (1)(1)\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta)$ ______(1)

$\vec{b}.\vec{a} = (\cos\beta\,\hat{i} + \sin\beta\,\hat{j}).(\cos\alpha\,\hat{i} + \sin\alpha\,\hat{j})$

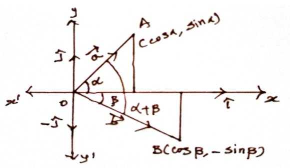
$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ ______(2)

From (1) and (2) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

EXAMPLE 6.3 :வெக்டர் முறையில்,

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ என நிறுவுக.

Solution:



$|\vec{a}|=|\vec{b}|= 1$

$\angle AOB = \alpha + \beta$

$A(\cos\alpha , \sin\alpha)$

$B(\cos\beta , -\sin\beta)$

$\vec{a} = \cos\alpha\,\hat{i} + \sin\alpha\,\hat{j}$ & $\vec{b} = \cos\beta\,\hat{i} - \sin\beta\,\hat{j}$

$\vec{b}.\vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}|\cos(\alpha+\beta) = (1)(1)\cos(\alpha+\beta)$

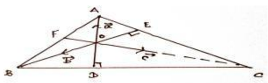
$= \cos(\alpha+\beta)$ ______(1)

$\vec{b}.\vec{a} = (\cos\beta\,\hat{i} - \sin\beta\,\hat{j}).(\cos\alpha\,\hat{i} + \sin\alpha\,\hat{j}) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ __(2)

From (1) and (2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

EXAMPLE 6.7 : ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளிலிருந்து அவற்றிற்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

Solution:



$AD \perp BC \Rightarrow OA \perp BC$,

$BE \perp CA \Rightarrow OB \perp CA$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$ $\qquad \Rightarrow \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{CA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC} = 0$ $\qquad \Rightarrow \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{CA} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$ $\qquad \Rightarrow \overrightarrow{OB}.(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$ $\qquad \Rightarrow \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ $\qquad \Rightarrow \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ & $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$ $\qquad \Rightarrow \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OC}.(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$

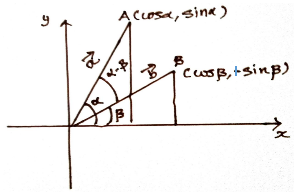
$\Rightarrow \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB} = 0$ $\qquad \Rightarrow \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow OC \perp AB$ **முக்கோணத்தின் உச்சிகளிலிருந்து அவற்றிற்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்**

EXAMPLE 6.5

வெக்டர் முறையில், $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ என நிறுவுக.

Solution:



$|\vec{a}|=|\vec{b}|= 1$

$\angle AOB = \alpha - \beta$

$A(\cos\alpha , \sin\alpha)$

$B(\cos\beta , \sin\beta)$

$\vec{a} = \cos\alpha\,\hat{I} + \sin\alpha\,\hat{j}$

$\vec{b} = \cos\beta\,\hat{i} + \sin\beta\,\hat{j}$

$\vec{b} \times \vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}|\sin(\alpha-\beta)\,\hat{k} = (1)(1)\sin(\alpha-\beta)\,\hat{k}$

$= \sin(\alpha-\beta)\,\hat{k}$ ______(1)

$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(\cos\beta\sin\alpha - \cos\alpha\sin\beta)$

$= \hat{k}(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$ ______(2)

From (1) and (2) $\sin(\alpha-\beta)\,\hat{k} = \hat{k}(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$

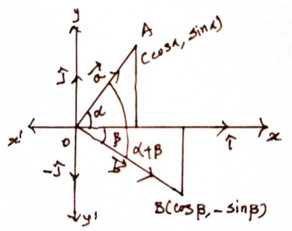
$\sin(\alpha-\beta) = (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$

பயிற்சி 6.1(10)

வெக்டர் முறையில்,

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ என நிறுவுக.

Solution:



$|\vec{a}|=|\vec{b}|= 1$

$\angle AOB = \alpha - \beta$

$A(\cos\alpha , \sin\alpha)$

$B(\cos\beta , -\sin\beta)$

$\vec{a} = \cos\alpha\,\hat{i} + \sin\alpha\,\hat{j}$

$\vec{b} = \cos\beta\,\hat{i} - \sin\beta\,\hat{j}$

$\vec{b} \times \vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}|\sin(\alpha+\beta)\,\hat{k} = (1)(1)\sin(\alpha+\beta)\,\hat{k}$

$= \sin(\alpha+\beta)\,\hat{k}$ ______(1)

$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(\cos\beta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta)$

$= \hat{k}(\cos\beta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta)$ ______(2)

From (1) and (2) $\sin(\alpha+\beta)\,\hat{k} = \hat{k}(\cos\beta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta)$

$\sin(\alpha+\beta) = (\cos\beta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta)$

பயிற்சி 6.3 (4):

$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}, \vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}, \vec{c} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, எனில்

(i) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

(ii) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ என்பவற்றைச் சரிபார்க்க .

Solution:

$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}, \quad \vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}, \quad \vec{c} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

(i) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$

L.H.S:

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ $=\hat{i}(6+5) - \hat{j}(4+3) + \hat{k}(10-9)$

$=\hat{i}(11) - \hat{j}(7) + \hat{k}(1) = 11\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 11 & -7 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-21+2) - \hat{j}(33+1) + \hat{k}(-22-7)$

$= \hat{i}(-19) - \hat{j}(34) + \hat{k}(-29) = -19\hat{i} - 34\hat{j} - 29\hat{k}.$

R.H.S.

$\vec{a}.\vec{c} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}).(-\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= 2(-1) + 3(-2) + (-1)(3) = -2-6-3 = -11$

$\vec{b}.\vec{c} = (3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}).(-\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= 3(-1) + 5(-2) + 2(3) = -3-10+6 = -13+6 = -7$

$(\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$

$= -11(3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}) - (-7)(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$

$= -33\hat{i} - 55\hat{j} - 22\hat{k} + 14\hat{i} + 21\hat{j} - 7\hat{k} = -19\hat{i} - 34\hat{j} - 29\hat{k}$

L.H.S = R.H.S $\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$

(ii) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

L.H.S

$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ $=\hat{i}(15+4) - \hat{j}(9+2) + \hat{k}(-6+5)$

$=\hat{i}(19) - \hat{j}(11) + \hat{k}(-1)$

$= 19\hat{i} - 11\hat{j} - 1\hat{k}.$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 19 & -11 & -1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-3-11) - \hat{j}(-2+19) + \hat{k}(-22-57)$

$=\hat{i}(-14) - \hat{j}(17) + \hat{k}(-79) = -14\hat{i} - 17\hat{j} - 79\hat{k}.$

$\vec{a}.\vec{c} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}).(-\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= 2(-1) + 3(-2) + (-1)(3) = -2-6-3 = -11$

$\vec{a}.\vec{b} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}).(3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k})$

$= 2(3) + 3(5) + (-1)(2) = 6+15-2 = 19$

$(\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

$= (-11)(3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}) - 19(-\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= -33\hat{i} - 55\hat{j} - 22\hat{k} + 19\hat{i} + 38\hat{j} - 57\hat{k}$

$= -14\hat{i} - 17\hat{j} - 79\hat{k}$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

எடுத்துக்காட்டு 6.23

$\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}, \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}, \vec{c} = 3\hat{j} - \hat{k}$ மற்றும் $\vec{d} = 2\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$ எனில்

I) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}$

II) (ii) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}$

Solution:

$\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}, \quad \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}, \quad \vec{c} = 3\hat{j} - \hat{k}, \quad \vec{d} = 2\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$

(i) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}$

L.H.S

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ $= \hat{i}(4-0) - \hat{j}(-4-0) + \hat{k}(-1+1)$

$= \hat{i}(4) - \hat{j}(-4) + \hat{k}(0) = 4\hat{i} + 4\hat{j}$

$\vec{c} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ $= \hat{i}(3+5) - \hat{j}(0+2) + \hat{k}(0-6)$

$= \hat{i}(8) - \hat{j}(2) + \hat{k}(-6) = 8\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 4 & 0 \\ 8 & -2 & -6 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-24-0) - \hat{j}(-24-0) + \hat{k}(-8-32)$

$= \hat{i}(-24) - \hat{j}(-24) + \hat{k}(-40) = -24\hat{i} + 24\hat{j} - 40\hat{k}$

R.H.S

$[\vec{a},\vec{b},\vec{d}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1+20) + 1(1+8) + 0(5+2)$

$= 1(19) + 1(9) + 0 = 19+9 = 28$

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(1+12) + 1(-1-0) + 0(3+0)$

$= 1(13) + 1(-1) + 0 = 13-1 = 12$

$[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d} = 28(3\hat{j} - \hat{k}) - 12(2\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k})$

$= 84\hat{j} - 28\hat{k} - 24\hat{i} - 60\hat{j} - 12\hat{k} = -24\hat{i} + 24\hat{j} - 40\hat{k}$

L.H.S=R.H.S $\quad \underline{(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}}$

(ii) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}$

L.H.S:

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ $= \hat{i}(4-0) - \hat{j}(-4-0) + \hat{k}(-1+1)$

$= \hat{i}(4) - \hat{j}(-4) + \hat{k}(0) = 4\hat{i} + 4\hat{j}$

$\vec{c} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ $= \hat{i}(3+5) - \hat{j}(0+2) + \hat{k}(0-6)$

$= \hat{i}(8) - \hat{j}(2) + \hat{k}(-6) = 8\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 4 & 0 \\ 8 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \hat{i}(-24-0) - \hat{j}(-24-0) + \hat{k}(-8-32)$

$= \hat{i}(-24) - \hat{j}(-24) + \hat{k}(-40) = -24\hat{i} + 24\hat{j} - 40\hat{k}$

$[\vec{a},\vec{c},\vec{d}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ $= 1(3+5) + 1(0+2) + 0(0-6)$

$= 1(8) + 1(2) + 0 = 8+2 = 10$

$[\vec{b},\vec{c},\vec{d}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ $= 1(3+5) + 1(0+2) - 4(0-6)$

$= 1(8) + 1(2) - 4(-6)$

$= 8+2+24 = 34$

$[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}$

$= 10(\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) - (34)(\hat{i} - \hat{j}) = 10((\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) - 34(\hat{i} - \hat{j})$

$= 10\hat{i} - 10\hat{j} - 40\hat{k} - 34\hat{i} + 34\hat{j} = -24\hat{i} + 24\hat{j} - 40\hat{k}$

பயிற்சி 6.5(4):

$\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-1}, z-1=0$ மற்றும் $\frac{x-6}{2}=\frac{z-1}{3}, y-2=0$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் எனக்காட்டுக . மேலும் , அவை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க .

Solution:

$\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-1}, z-1=0 \Rightarrow \frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{0}$

$\frac{x-6}{2}=\frac{z-1}{3}, y-2=0 \Rightarrow \frac{x-6}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{3}$

$\vec{a}=3\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ $\qquad \vec{b}=3\hat{i}-\hat{j}+0\hat{k}$

$\vec{c}=6\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ $\qquad \vec{d}=2\hat{i}+0\hat{j}+3\hat{k}$

$\vec{b}$ & $\vec{d}$ **இணை வெக்டர்கள் அல்ல**

$\vec{c}-\vec{a}=6\hat{i}+2\hat{j}+\vec{k}-3\hat{i}-3\hat{j}-\vec{k}=3\hat{i}-\hat{j}$

$\vec{b}\times\vec{d}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=\hat{i}(-3)-\hat{j}(9)+\hat{k}(0+2)$

$=-3\hat{i}-9\hat{j}+2\hat{k}$

$(\vec{c}-\vec{a}).(\vec{b}\times\vec{d})=(3\hat{i}-\hat{j}).(-3\hat{i}-9\hat{j}+2\hat{k})$

$=3(-3)+(-1)(-9)+0=0$

கோடுகள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக்கொள்ளும்

$\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{0}=\lambda$

$\frac{x-3}{3}=\lambda, \frac{y-3}{-1}=\lambda, \frac{z-1}{0}=\lambda$

$x-3=3\lambda, y-3=-\lambda, z-1=0$

$x=3+3\lambda, y=3-\lambda, z=1$

ஏதேனும் புள்ளி $(3+3\lambda, 3-\lambda, 1)$

$\frac{x-6}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{3}=\mu$

$\frac{x-6}{2}=\mu, \frac{y-2}{0}=\mu, \frac{z-1}{3}=\mu$

$x-6=2\mu, y-2=0, z-1=3\mu$

$x-6=2\mu, y-2=0, z-1=3\mu$

$x=2\mu+6, y=2, z=3\mu+1$

ஏதேனும் புள்ளி $(2\mu+6, 2, 3\mu+1)$

$(3+3\lambda, 3-\lambda, 1)=(2\mu+6, 2, 3\mu+1)$

$3-\lambda=2 \Rightarrow -\lambda=2-3=-1 \Rightarrow \lambda=1$

$3\mu+1=1 \Rightarrow 3\mu=1-1=0, \Rightarrow \mu=0.$

வெட்டும் புள்ளி (6, 2, 1)

எடுத்துக்காட்டு 6.33:

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ மற்றும் $\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=z$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க .

intersection.

Solution:

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ $\qquad \frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=z=\frac{z-0}{1}$

$\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ $\qquad \vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$

$\vec{c}=4\hat{i}+\hat{j}+0\hat{k}$ $\qquad \vec{d}=5\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{b}$ & $\vec{d}$ **இணை வெக்டர்கள் அல்ல**

$\vec{c}-\vec{a}=4\hat{i}+\hat{j}+0\hat{k}-\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}=3\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$

$\vec{b}\times\vec{d}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}$

$=\hat{i}(3-8)-\hat{j}(2-20)+\hat{k}(4-15)=-5\hat{i}+18\hat{j}-11\hat{k}$

$(\vec{c}-\vec{a}).(\vec{b}\times\vec{d})=(3\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}).(-5\hat{i}+18\hat{j}-11\hat{k})$

$=3(-5)+(-1)(18)+(-3)(-11)$

$=-15-18+33=0$

கோடுகள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக்கொள்ளும்

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}=\lambda$

$\frac{x-1}{2}=\lambda, \frac{y-2}{3}=\lambda, \frac{z-3}{4}=\lambda$

$x-1=2\lambda, y-2=3\lambda, z-3=4\lambda$

$x=2\lambda+1, y=3\lambda+2, z=4\lambda+3$

ஏதேனும் புள்ளி $(2\lambda+1, 3\lambda+2, 4\lambda+3)$

$\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-0}{1}=\mu$

$\frac{x-4}{5}=\mu, \frac{y-1}{2}=\mu, \frac{z-0}{1}=\mu$

$x-4=5\mu, y-1=2\mu, z=\mu$

$x=5\mu+4, y=2\mu+1, z=\mu$

ஏதேனும் புள்ளி $(5\mu+4, 2\mu+1, \mu)$

$(2\lambda+1, 3\lambda+2, 4\lambda+3)=(5\mu+4, 2\mu+1, \mu)$

$2\lambda+1=5\mu+4$

$\Rightarrow 2\lambda-5\mu=3$ ______ (1)

$4\lambda+3=\mu$

$\Rightarrow 4\lambda-\mu=-3$ ______(2)

$(1)\times 2 \Rightarrow 4\lambda-10\mu=6$

$(2)\times 1 \Rightarrow 4\lambda-\mu=-3$

$- \quad + \quad +$

$-9\mu=9$

$\mu=-1$

$\mu=-1$ பிரதியிட in $4\lambda-\mu=-3$

$4\lambda-(-1)=-3$

$4\lambda+1=-3$

$4\lambda=-3-1=-4$

$\lambda=-1$

வெட்டும் புள்ளி (-1, -1, -1)

எடுத்துக்காட்டு 6.37

(−1,2,3) என்ற புள்ளியிலிருந்து $\vec{r} = (\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}) + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் அடியின் அச்சுத்தூரங்களைக் காண்க . மேலும் , கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து நேர்க்கோட்டிற்கு உள்ள மீச்சிறு தூரத்தைக் காண்க .

Solution:

$\vec{r} = (\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}) + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

$\vec{a} = \hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$ $(x_1, y_1, z_1) = (1, -4, 3)$

$\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ $(b_1, b_2, b_3) = (2, 3, 1)$

கார்டீசியன் சமன்பாடு :

$\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{1}$

ஏதேனும் புள்ளி கண்டுபிடிக்க : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{1} = t$

$\frac{x-1}{2} = t, \frac{y+4}{3} = t, \frac{z-3}{1} = t$

$x = 2t + 1, y = 3t - 4, z = t + 3$

ஏதேனும் புள்ளி $(2t + 1, 3t - 4, t + 3)$

செங்குத்தின் அடியின் புள்ளி $B(2t + 1, 3t - 4, t + 3)$

$A(-1, 2, 3)$

A மற்றும் B இணைக்கும் கோட்டின் திசை கொசைனின் விகிதங்கள்

D.r's = $(2t + 1 + 1, 3t - 4 - 2, t + 3 - 3) = (2t + 2, 3t - 6, t)$

D.r's = $(2, 3, 1)$

கோடுகள் செங்குத்து என்பதால்

$2(2t + 2) + 3(3t - 6) + (1)(t) = 0$

$4t + 4 + 9t - 18 + t = 0 \Rightarrow 14t - 14 = 0 \Rightarrow 14t = 14 \Rightarrow t = 1$

$B(2(1)+1, 3(1) - 4, 1 + 3) = (3, -1, 4)$

$A = (-1, 2, 3)$ and $B(3, -1, 4)$

$AB = \sqrt{(3-(-1))^2 + (-1-2)^2 + (4-3)^2}$

$= \sqrt{(3+1)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$

எடுத்துக்காட்டு 6.35

$\vec{r} = (2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}) + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$, $\vec{r} = (2\hat{j} - 3\hat{k}) + s(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ என்ற ஒரு ஜோடி நேர்க்கோடுகள் இணைக் கோடுகளாகுமா எனக் காண்க . மேலும் , அக்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் காண்க .

SOLUTION :

$\vec{a} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$ $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{c} = 2\hat{j} - 3\hat{k}$ $\vec{d} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{b}$ & $\vec{d}$ இணை வெக்டர்கள் அல்ல

$\vec{c} - \vec{a} = 2\hat{j} - 3\hat{k} - 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k} = -2\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k}$

$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}(9-8) - \hat{j}(6-4) + \hat{k}(4-3)$

$= \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$(\vec{c} - \vec{a}).(\vec{b} \times \vec{d}) = (-2\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k}).(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

$= (-2)(1) + (-4)(-2) + (-6)(1) = -2 + 8 - 6 = 0$

தூரம் = 0

எடுத்துக்காட்டு 6.34

$\vec{r} = (\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$ மற்றும் $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{4}$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி வழியாகச் செல்வதும் , மற்றும் இவ்விரு கோடுகளுக்கும் செங்குத்தானதுமான நேர்க்கோட்டின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாட்டைக் காண்க .

Solution:

$\vec{r} = (\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + t(2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ $(x_1, y_1, z_1) = (1, 3, -1)$

$\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ $(b_1, b_2, b_3) = (2, 3, 2)$

கார்டீசியன் சமன்பாடு :

$\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$

ஏதேனும் புள்ளி கண்டுபிடிக்க : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2} = t$

$\frac{x-1}{2} = t, \frac{y-3}{3} = t, \frac{z+1}{2} = t$

$x = 2t + 1, y = 3t + 3, z = 2t - 1$

ஏதேனும் புள்ளி $(2t + 1, 3t + 3, 2t - 1)$

இரண்டாவது கோடு : $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{4}$

ஏதேனும் புள்ளி கண்டுபிடிக்க: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{4} = s$

$\frac{x-2}{1} = s, \frac{y-4}{2} = s, \frac{z+3}{4} = s$

$x = s + 2, y = 2s + 4, z = 4s - 3$

ஏதேனும் புள்ளி $(s + 2, 2s + 4, 4s - 3)$

கோடுகள் வெட்டிக்கொள்வதால்

$(2t + 1, 3t + 3, 2t - 1) = (s + 2, 2s + 4, 4s - 3)$

x coordinate : $2t + 1 = s + 2 \Rightarrow 2t - s = 2 - 1 \Rightarrow 2t - s = 1$

y coordinate: $3t + 3 = 2s + 4 \Rightarrow 3t - 2s = 4 - 3 \Rightarrow 3t - 2s = 1$

z coordinate : $2t - 1 = 4s - 3 \Rightarrow 2t - 4s = -3 + 1 \Rightarrow$

$2t - 4s = -2$

$2t - 4s = -2$ divide by 2 $\Rightarrow t - 2s = -1$

$t = 1$ and $s = 1$

புள்ளி : $(1+2, 2(1)+4, 4(1)-3) = (3, 6, 1)$

$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}(12-4) - \hat{j}(8-2) + \hat{k}(4-3)$

$= 8\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}$

(3,6,1)புள்ளி வழி செல்வதும் $8\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}$

இணையானதும்

கோட்டின் சமன்பாடு $\vec{a} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}$ & $\vec{b} = \hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}$

வெக்டர் சமன்பாடு : $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}, \quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{a} = (3\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}) + t(8\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k})$

Example 6.43

(0,1,−5) என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் $\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}) + s(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ மற்றும் $\vec{r} = (\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}) + t(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$ என்ற கோடுகளுக்கு இணையாக உள்ளதுமான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க .

Solution:

புள்ளி: $\vec{a} = 0\hat{i}+1\hat{j}-5\hat{k}$ $(x_1, y_1, z_1) = (0,1,-5)$

இணை வெக்டர் : $\vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$ $(b_1, b_2, b_3) = (2, 3, 6)$

இணை வெக்டர் :$\vec{c} = \hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ $(c_1, c_2, c_3) = (1, 1, -1)$

துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு: $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$

$$\Rightarrow \vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}) + s\ (2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\ ) + t\ (\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$$

கார்ட்டீசியன் சமன்பாடு : $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z+5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$(x)(-3-6) - (y-1)(-2-6)+(z+5)(2-3) = 0

$\Rightarrow$x(-9) - (y-1)(-8)+(z+5)(-1) = 0

$\Rightarrow$-9x +8(y-1)-1(z+5) = 0

$\Rightarrow$-9x + 8y - 8 - z -5 = 0$\Rightarrow$ -9x + 8y - z = 13

$\Rightarrow$9x - 8y + z = -13

<u>துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு</u>

$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}).(-9\hat{i}+8\hat{j}-\hat{k}) = 13 \Rightarrow \vec{r}.(-9\hat{i}+8\hat{j}-\hat{k}) = 13$

Example 6.44

(−1 , 2 , 0) , (2 , 2 , −1) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்வதும் $\frac{x-1}{1} = \frac{2y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாகவும் உள்ள தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு , துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க .

Solution:

$\frac{x-1}{1} = \frac{2y+1}{2} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{2(y+\frac{1}{2})}{2} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{(y+\frac{1}{2})}{1} = \frac{z+1}{-1}$

புள்ளி : $\vec{a} = -1\hat{i}+2\hat{j}+0\hat{k}$ $(x_1, y_1, z_1) = (-1,2,0)$

புள்ளி : $\vec{b} = 2\hat{i}+2\hat{j}-1\hat{k}$ $(x_2, y_2, z_2) = (2, 2, -1)$

இணை வெக்டர்l :$\vec{c} = \hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ $(c_1, c_2, c_3) = (1, 1, -1)$

$\vec{b} - \vec{a} = 2\hat{i}+2\hat{j}-1\hat{k} - (-1\hat{i}+2\hat{j}+0\hat{k}) = 2\hat{i}+2\hat{j}-1\hat{k}+1\hat{i}-2\hat{j}$

$= 3\hat{i}+0\hat{j}-1\hat{k}$

<u>துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு</u>

$$\vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b}-\vec{a}) + t\vec{c}$$

$\vec{r} = (-1\hat{i}+2\hat{j}+0\hat{k}) + s(3\hat{i}+0\hat{j}-1\hat{k}) + t\ (\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$

கார்ட்டீசியன் சமன்பாடு $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-2 & z-0 \\ 2-(-1) & 2-2 & -1-0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ (x+1)(0+1)-(y-2)(-3+1)+(z)(3) = 0

$\Rightarrow$1(x+1)+2(y-2)+3(z) =0 $\Rightarrow$ x +1+ 2y - 4+ 3z = 0

$\Rightarrow$x + 2y + 3z - 3 = 0 $\Rightarrow$ x + 2y + 3z = 3

<u>துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு</u>

$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}).(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) = 3 \Rightarrow \vec{r}.(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) = 3$

Exercise 6.7(1)

(2,3,6) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$ மற்றும் $\frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+1}{-3}$ என்ற கோடுகளுக்கு இணையானதுமான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க .

Solution:

புள்ளி : $\vec{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$ $(x_1, y_1, z_1) = (2,3,6)$

இணை வெக்டர் : $\vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+1\hat{k}$ $(b_1, b_2, b_3) = (2, 3, 1)$

இணை வெக்டர் :$\vec{c} = 2\hat{i}-5\hat{j}-3\hat{k}$ $(c_1, c_2, c_3) = (2, -5, -3)$

துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு

Formula: $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$

$\Rightarrow \vec{r} = (2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}) + s\ (2\hat{i}+3\hat{j}+1\hat{k}\ ) + t\ (2\hat{i}-5\hat{j}-3\hat{k})$

கார்ட்டீசியன் சமன்பாடு : $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$(x-2)(-9+5) - (y-3)(-6-2)+(z-6)(-10-6) = 0

$\Rightarrow$(x-2)(-4) - (y - 3)(-8)+(z - 6)(-16) = 0

$\Rightarrow$-4(x-2) +8(y-3)-16(z - 6) = 0

$\Rightarrow$-4x + 8 + 8y - 24 - 16z + 96 = 0

$\Rightarrow$x - 2y + 4 z + 80 = 0 $\Rightarrow$ x - 2y + 4 z = 20

<u>துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு</u>

$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}).(\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}) = 20 \Rightarrow \vec{r}.(\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}) = 20$

<u>6.7 (2) :</u> (2,2,1), (9,3,6) ஆகிய புள்ளிகள் வழிச் செல்லக் கூடியதும் 2x + 6y + 6z = 9 என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமைவதுமான தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க .

Solution:

புள்ளி : $\vec{a} = 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ $(x_1, y_1, z_1) = (2,2, 1)$

புள்ளி : $\vec{b} = 9\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$ $(x_2, y_2, z_2) = (9, 3, 6)$

இணை வெக்டர் : $\vec{c} = 2\hat{i}+6\hat{j}+6\hat{k}$ $(c_1, c_2, c_3) = (2, 6, 6)$

$\vec{b} - \vec{a} = 9\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k} - (2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$

$= 9\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k} - 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k} = 7\hat{i}+1\hat{j}+5\hat{k}$

<u>துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு</u>

$\vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b}-\vec{a}) + t\vec{c}$

$\vec{r} = (2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}) + s(7\hat{i}+1\hat{j}+5\hat{k}) + t\ (2\hat{i}+6\hat{j}+6\hat{k})$

கார்ட்டீசியன் சமன்பாடு $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 9-2 & 3-2 & 6-1 \\ 2 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$(x- 2)(6 - 30) - (y - 2)(42 - 10) + (z - 1)(42 - 2) = 0

$\Rightarrow$ -24(x - 2) - 32 (y-2) + 40(z - 1) = 0

$\Rightarrow$ − 24x + 48 -32y + 64 +40z - 40 = 0

$\Rightarrow$ −24x - 32y + 40z + 72 = 0

$\Rightarrow$ 3x + 4y - 5z - 9 = 0

<u>துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு</u>

$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}).(3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}) - 9 = 0$

$\Rightarrow \vec{r}.(3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}) = 9$

Exercise 6.7(4): (1,−2, 4) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $x + 2y - 3z = 11$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் $\frac{x+7}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{1}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாகவும் அமையும் தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க .

Solution:

(1,−2, 4) $x + 2y - 3z = 11$ $\frac{x+7}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{1}$

புள்ளி : $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ $(x_1, y_1, z_1) = (1, -2, 4)$

இணை வெக்டர் : $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ $(b_1, b_2, b_3) = (1, 2, -3)$

இணை வெக்டர் : $\vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ $(c_1, c_2, c_3) = (3, -1, 1)$

துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$

$\Rightarrow \vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) + s\ (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}\ ) + t\ (3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

கார்ட்டீசியன் சமன்பாடு : $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z - 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

⇒(x - 1)(2-3) - (y+2)(1+9)+(z-4)(-1-6) = 0

⇒(x-1)(-1) - (y+2)(10)+(z-4)(-7) = 0 ⇒-1(x -1) -10(y + 2)-7(z - 4) = 0

⇒-x +1-10 y - 20 - 7z + 28 = 0 ⇒-x -10y - 7z + 9 = 0

⇒ x + 10y + 7 z - 9 = 0

துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு

$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}).(\hat{i} + 10\hat{j} + 7\hat{k}) - 9 = 0$

$\Rightarrow \vec{r}.(\hat{i} + 10\hat{j} + 7\hat{k}) - 9 = 0$

---

5. (2, 2,1) , (1,−2,3) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்வதும் (2,1,−3) மற்றும் (−1,5,−8) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும் அமையும் தளத்தின் துணையலகு வெக்டர் சமன்பாடு , மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க .

Solution: $\overrightarrow{OP} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ $\overrightarrow{OQ} = -\hat{i} + 5\hat{j} - 8\hat{k}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = -\hat{i} + 5\hat{j} - 8\hat{k} - 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} = -3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$

புள்ளி : $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ $(x_1, y_1, z_1) = (2, 2,1)$

புள்ளி : $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $(x_2, y_2, z_2) = (1,-2,3)$

இணை வெக்டர் : $\vec{c} = -3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ $(c_1, c_2, c_3) = (-3, 4, -5)$

$\vec{b} - \vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} - (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

$= \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} - 2\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k} = -\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு

$\vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t\vec{c}$

$\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + s(-\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) + t(-3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k})$

கார்ட்டீசியன் சமன்பாடு : $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 2 & z - 1 \\ 1 - 2 & -2 - 2 & 3 - 1 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 2 & y - 2 & z - 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0$

⇒(x - 2)(20 - 8) - (y-2)(5 -+ 6)+(z - 1)(-4 - 12) = 0

⇒12(x-2) - 11(y-2) - 16(z - 1) = 0

⇒12 x -24 - 11y + 22 - 16z + 16 = 0

⇒ 12 x - 11y - 16 z + 14 = 0

⇒ 12x - 11y - 16 z = - 14

துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு

$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}).(12\hat{i} - 11\hat{j} - 16\hat{k}) = -14$

$\Rightarrow \vec{r}.(12\hat{i} - 11\hat{j} - 16\hat{k}) = -14$

5.$\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) + t(2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k})$ என்ற கோட்டை உள்ளடக்கியதும் $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = 8$ என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தானதுமான தளத்தின் துணையலகு வடிவ வெக்டர் , மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க .

Solution:

$\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) + t(2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k})$ கோட்டை உள்ளடக்கியதும் $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = 8$ தளத்திற்குச் செங்குத்தானது

புள்ளி : $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ $(x_1, y_1, z_1) = (1, -1, 3)$

இணை வெக்டர் : $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ $(b_1, b_2, b_3) = (2, -1, 4)$

இணை வெக்டர் : $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ $(c_1, c_2, c_3) = (1, 2, 1)$

துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு :$\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$

$\Rightarrow \vec{r} = (\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) + s\ (2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}\ ) + t\ (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

கார்ட்டீசியன் சமன்பாடு : $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

⇒(x - 1)(-1-8) - (y + 1)(2 - 4)+(z - 3)(4 + 1) = 0

⇒(x-1)(-9) - (y + 1)(-2)+(z - 3)(5) = 0

⇒ - 9(x-1) + 2(y +1)+ 5(z - 3) = 0

⇒ - 9x + 9 + 2y + 2 + 5z -15 = 0

⇒ - 9x + 2y + 5 z - 4 = 0 ⇒ 9x - 2y - 5 z + 4 = 0

துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு

$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}).(9\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}) + 4 = 0$ $\Rightarrow \vec{r}.(9\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}) + 4 = 0$

---

6. (3 , 6 ,−2) , (−1 ,−2 , 6) , மற்றும் (6, 4, −2) ஆகிய ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் தளத்தின் துணையலகு , துணையலகு அல்லாத வெக்டர் , மற்றும் கார்டீசியன் சமன்பாடுகளைக் காண்க .

SOLUTION:

புள்ளி : $\vec{a} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ $(x_1, y_1, z_1) = (3, 6, -2)$

புள்ளி : $\vec{b} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ $(x_2, y_2, z_2) = (-1, -2, 6)$

புள்ளி : $\vec{c} = 6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ $(x_3, y_3, z_3) = (6, 4, -2)$

$\vec{b} - \vec{a} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k} - 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k} = -4\hat{i} - 8\hat{j} + 8\hat{k}$

$\vec{c} - \vec{a} = 6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k} - 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 0\hat{k}$

துணை அலகு வெக்டர் சமன்பாடு

$\vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})$

$\vec{r} = (3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}) + s(-4\hat{i} - 8\hat{j} + 8\hat{k}) + t(3\hat{i} - 2\hat{j} + 0\hat{k})$

கார்ட்டீசியன் சமன்பாடு: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} x - 3 & y - 6 & z + 2 \\ -1 - 3 & -2 - 6 & 6 + 2 \\ 6 - 3 & 4 - 6 & -2 + 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x - 3 & y - 6 & z + 2 \\ -4 & -8 & 8 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

⇒(x - 3)(0 +16) - (y - 6)(0 - 24)+(z+ 2)(8 + 24) = 0

⇒16(x-3) +24(y-6) +32(z + 2) = 0

⇒16 x -48 + 24y - 144 + 32z + 64 = 0

⇒ 16 x + 24y + 32z - 128 = 0 ⇒ 2x + 3y + 4 z - 16 = 0

துணை அலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாடு

$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}).(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = 16 \Rightarrow \vec{r}.(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = 32$

Example 6.46

$\vec{r} = (-\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}) + s(3\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k})$ **மற்றும்** $\vec{r} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}) + t(\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k})$ **ஆகிய கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமையும் எனக்காட்டுக. மேலும், இக்கோடுகளைத் தன்னகத்தே கொண்டுள்ள தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாட்டைக் காண்க.**

Solution:

$$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b} \quad \& \quad \vec{r} = \vec{c} + s\vec{d}$$

$\vec{a} = -\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$, மற்றும் $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$,

$\vec{c} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ மற்றும் $\vec{d} = \hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$ ஆகும்

இரண்டு கோடுகள் ஒரே தளம் அமையும் கோடுகளாக இருக்கக் கட்டுப்பாடு $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

இங்கு, $\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}$

$\vec{c} - \vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k} - (-\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$

$= 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k} + \hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k} = 3\hat{i} + 7\hat{j} + 11\hat{k}$

$(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = (3\hat{i} + 7\hat{j} + 11\hat{k}) \cdot (7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k})$

= 21-98+77 = 98-98 = 0

$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

$(\vec{r} - (-\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})) \cdot (7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}) = 0.$

$\vec{r} \cdot (7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}) - (-\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})) \cdot (7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}) = 0$

$\vec{r} \cdot (7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}) - (-7 + 42 - 35) = 0$

$\vec{r} \cdot (7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}) = 0 \quad (\div \text{by } 7) \quad \vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$

EX 6.8 1.

$\vec{r} = (5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}) + s(4\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k})$ **மற்றும்** $\vec{r} = (8\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) + t(7\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k})$**ஆகிய கோடிகள் ஒரே தளத்தில் அமையும் எனக் காண்பிக்க மேலும்,இக்கோடுகள் அமையும் தளத்தின் துணையலகு அல்லாத வெக்டர் சமன்பாட்டைக் காண்க.**

SOLUTION:

$\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$ $\quad$ $\vec{b} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{c} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ $\quad$ $\vec{d} = 7\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

இரண்டு கோடுகள் ஒரு தளம் அமைவன எனில்

$(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 4 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= (12 + 5)\hat{i} - (12 + 35)\hat{j} + (4 - 28)\hat{k} = 17\hat{i} - 47\hat{j} - 24\hat{k}$

$(\vec{c} - \vec{a}) = (8 - 5)\hat{i} + (4 - 7)\hat{j} + (5 + 3)\hat{k} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + 8\hat{k}$

இங்கு, $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = (3\hat{i} - 3\hat{j} + 8\hat{k}).(17\hat{i} - 47\hat{j} - 24\hat{k})$

$= 51 + 141 - 192 = 192 - 192 = 0$

∴ கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் ஒரு தளம் அமைவன.

ஒரு தளம் அமையும் கோடுளை கொண்ட தளம்.

$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

$(\vec{r} - 5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}) \times (17\hat{i} - 47\hat{j} - 24\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow \vec{r} \cdot (17\hat{i} - 47\hat{j} - 24\hat{k}) -$

$[(5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (17\hat{i} - 47\hat{j} - 24\hat{k})] = 0$

$\vec{r} \cdot (17\hat{i} - 47\hat{j} - 24\hat{k}) - [85 - 329 + 72] = 0$

$\vec{r} \cdot (17\hat{i} - 47\hat{i} - 24\hat{k}) - 172 = 0$என்பது தேவையான வெக்டர் தளத்திற்கான சமன்பாடு

கேள்வி 6.8 (2).

$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{3}$ **மற்றும்** $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{1}$ **என்ற கோடுகள் ஒரு தளத்தில் அமையும் எனக்காட்டுக. மேலும், இக்கோடுகள் அமையும் தளத்தினைக் காண்க.**

SOLUTION:

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{3}$ மற்றும் $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{1}$

$\therefore \vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}, \vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{c} = \hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}, \vec{d} = -3\hat{i} + 2\hat{i} + \hat{k}$

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் ஒரு தளம் அமைவன

$(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

$(\vec{c} - \vec{a}) = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{2}$

$= \hat{i}(1 - 6) - \hat{j}(1 + 9) + \hat{k}(2 + 3)$

$= -5\hat{i} - 10\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore (\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = (-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot (-5\hat{i} - 10\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 5 - 10 + 5 = 10 - 10 = 0$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட கோடுகெள் ஒரு தளம் அமையும்

அதனுடைய கார்டீசியன் சமன்பாடானது

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x - 1 & y - 4 & z - 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (x - 1)(1 - 6) - (y - 4)(1 + 9) + (z - 5)(2 + 3) = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(-5) - (y - 4)(10) + (z - 5)(5) = 0$

$\Rightarrow -5x + 5 - 10y + 40 + 5z - 25 = 0$

$\Rightarrow -5x - 10y + 5z + 20 = 0$

$\div -5$ கிடைப்பது

$x + 2y - z - 4 = 0$

என்பது கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளள் கொண்ட தளத்தின் சமன்பாடு

கேள்வி 6.8 (4).
$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{\lambda}=\frac{z}{2}$ **மற்றும்** $\frac{x+1}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{\lambda}$ **ஆகிய கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமைகின்றன எனில், λ-ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும், இவ்விரு கோடிகெளைக் கொண்ட தளங்களின் சமன்பாடுகளளைக் காண்க.**

SOLUTION: கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள்
$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{\lambda}=\frac{z}{2}$ மற்றும் $\frac{x+1}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{\lambda}$

$\therefore\ \vec{a}=\hat{i}-\hat{j},\qquad \vec{b}=2\hat{i}+\lambda\hat{j}+2\hat{k}$

$\vec{c}=-\hat{i}-\hat{j}\qquad ,\vec{d}=5\hat{i}+2\hat{j}+\lambda\hat{k}$

$(\vec{c}-\vec{a})=-2\hat{i},$

$$(\vec{b}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\2&\lambda&2\\5&2&\lambda\end{vmatrix}=\hat{i}(\lambda^2-4)-\hat{j}(2\lambda-10)+\hat{k}(4-5\lambda)$$

கொடுக்கப்பட்ட கோடிகள் ஒரு தளம் அமைவன

ஆதலால் $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})=0$

$\Rightarrow(-2\vec{i})\cdot\left[(\lambda^2-4)\hat{i}-\hat{j}(2\lambda-10)+\hat{k}(4-5\lambda)\right]=0$

$\Rightarrow-2(\lambda^2-4)=0\Rightarrow\lambda^2=4[\because-2\neq0]$

$\Rightarrow\lambda=\pm\sqrt{4}=\pm2$

தளத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix}x-x_2&y-y_2&z-z_2\\b_1&b_2&b_3\\d_1&d_2&d_3\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}x+1&y+1&z\\2&2&2\\5&2&2\end{vmatrix}=0[\because\lambda=2]$$

$\Rightarrow(x+1)(4-4)-(y+1)(4-10)+z(4-10)=0$

$\Rightarrow(x+1)(0)-(y+1)(-6)+z(-6)=0$

$\Rightarrow6(y+1)-6z=0\quad\Rightarrow y+1-z=0[\div6]$

$\Rightarrow y-z+1=0$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளளை கொண்டிருக்கும் தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு

கேள்வி 6.9 (8).: $(4,3,2)$ **என்ற புள்ளியில் இருந்து** $x+2y+3z=2$ **என்ற தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் அடியின் அச்சுத்தூரங்களையும், செங்குத்தின் நீளத்தையும் காண்க.**

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட தளத்தின் சமன்பாடு
$x+2y+3z=2$

(4, 3, 2) லிருந்து தளத்துக்கான செங்குத்தின் நீளம்

$d=\frac{4+2(3)+3(2)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{4+6+6}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$ அலகுகள்

தளம் $x+2y+3z=2$ u ில் புள்ளி (4,3,2) க்கான பிம்பம்

இங்கு $\vec{u}=4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k},\vec{n}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ மற்றும் $p=38$

பிறகு பிம்பம் $\vec{v}=\vec{u}+\frac{2[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})]}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$

$$\vec{v}=(4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})+\frac{2[2-(4+6+6)]}{\left(\sqrt{1^2+2^2+3^2}\right)^2}(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$$

$$=(4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})+\frac{2(2-16)}{14}(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$$

$$=(4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})+\frac{2(-14)}{14}(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$$

$$=(4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})-2(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}-2\hat{i}-4\hat{j}-6\hat{k}$$
$$=2\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k}$$

$\therefore$ (4,3,2) லிருந்து தளத்துக்கான செங்குத்தின்

அடி $=\frac{(4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})+(2\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k})}{2}=\frac{6\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}}{2}=3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

அத்தியாயம் 11- நிகழ்தகவுபரவல்கள்
2 , 3 - மதிப்பெண்கள்

2 - மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 11.1(1)

X என்பது மூன்று சீரான நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் ஒரு முறைச் சுண்டும் போது விழும் பூக்களின் எண்ணிக்கை என்க. சமவாய்ப்பு மாறியான X-இன் மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க .

தீர்வு:

மூன்று சீரான நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டும் போது கூறுவெளி

$S = \{HHH, HHT, THH, HTH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

இங்கு X என்பது பூக்களின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது என்க.

$X(0$ பூ $) = \{HHH\} = 1$

$X(1$ பூ$) = \{HHT, THT, HTH\} = 3$

$X\,(2$ பூக்கள் $) = \{HTT, THT, TTH\} = 3$

$X\,(3$ பூக்கள் $) = \{\ TTT\ \} = 1$

$\therefore$ X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0,1,2,3.

சமவாய்ப்பு மாறி , X-இன் மதிப்புகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	3	3	1	8

பயிற்சி 11.2

1. மூன்று சீரான நாணயங்கள் ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவு நிறை சார்பினைக் காண்க.

தீர்வு:

கூறுவெளி $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

X என்பது தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறிக்குறது என்க.

$p(x=0) = p($ தலை இல்லை $) = p(TTT) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$p(x=1) = p(1$ தலை $) = p(THT, HTT, TTH) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$p(x=2) = p(2$ தலைகள் $) = p(HHT, HTH, THH)$

$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8} = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$p(x=3) = p(3$ தலைகள் $) = p(HHH) = \frac{1}{8}$

$\therefore$ X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0,1,2,3.

நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

x	0	1	2	3
f(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

$f(x) = \begin{cases} 1/8 & x = 0.3 \\ 3/8 & x = 1,2 \end{cases}$

பயிற்சி 11.3

1. சமவாய்ப்பு மாறி X - யின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $\mathbf{f(x) = \begin{cases} kxe^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}}$ எனில் k மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \begin{cases} kxe^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு ஆதலால்

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow k\int_0^{\infty} xe^{-2x}dx = 1 \Rightarrow k \cdot \frac{1!}{(2)^2} = 1$

$\left[\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}},\right.$ இங்கு $\left. a = 2, n = 1\right]$

$\Rightarrow \frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = 4$

பயிற்சி 11.4

5. ஒரு பயணிகள் இரயில் ஒவ்வொரு அரை மணி நேரத்திற்கும் ஒரு நிலையத்திற்கு சரியான நேரத்தில் வந்து சேரும். ஒவ்வொரு நாள் காலையிலும், ஒரு மாணவர் தனது வீட்டிலிருந்து இரயில் நிலையத்திற்கு செல்கிறார். மாணவர் ரயில் நிலையத்தை அடையும் நேரத்திலிருந்து ரயிலுக்காக காத்திருக்கும் நேரத்தை X என நிமிடங்களில் குறிக்கலாம். X - ன் நிகழ்தகவு $\mathbf{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}}$ எனில் சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் எதிர்பார்ப்பு காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

சராசரி $= E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{xf(x)\,dx}$

$= \int_0^{30} x \cdot \frac{1}{30}dx$

$E(X) = \frac{1}{30}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{30} = \frac{1}{60}[30^2 - 0^2] = \frac{1}{60}(900)$

$E(X) = 15$ நிமிடங்கள்

6. கணினி தயாரிக்கப்படும் போது ஆயிரக் கணக்கான மணிநேரம் பயன்படுத்தப்படும் ஒருமின்னணு சாதனமொன்றின் பழுதடையும் நேரத்தின் அடர்த்தி சார்பு $\mathbf{\begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}}$ இம்மின்னனு சாதனத்தின் எதிர்பார்க்கப்படும் ஆயுட்காலத்தை காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{xf(x)\,dx} = \int_0^{\infty} x \cdot 3 \cdot e^{-3x}dx$

$= 3\int_0^{\infty} x \cdot e^{-3x}dx \qquad \left[\because \int_0^{\infty} x^n e^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}}\right]$

$= 3 \times \frac{1!}{3^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

: மின்னனு சாதனத்தின் எதிர் பார்க்கப்படும் ஆயுட் காலம் $\frac{1}{3}$ ஆகும்.

பயிற்சி 11.5

1. கீழ்காணும் ஈருறுப்பு பரவல் $B(n,p)$-க்காக $P(X=k)$ என்பதைக் கணிக்க.

(i) $n=6$, $p=\frac{1}{3}$, $k=3$

தீர்வு:

$n = 6$, $p = \frac{1}{3}$; $k = 3$

$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$

$P(X = x) = n\,C_x\, p^x q^{n-x}$ [$n = 4$, $x = 3$, $n - x = 4-3 = 1$]

$P(X = 3) = 6C_3 (\frac{1}{3})^3 (\frac{2}{3})^3 = 20 (\frac{1}{27}) (\frac{8}{27}) = \frac{160}{729}$

(ii) $n = 10$, $p = \frac{1}{5}$, $k = 4$

$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}$

$P(X = x) = n\,C_x\, p^x q^{n-x}$ [$n = 10$, $x = 4$, $n - x = 10-4 = 6$]

$P(X = 4) = 10C_4 (\frac{1}{5})^4 (\frac{4}{5})^6$

(iii) **$n = 9$, $p = \frac{1}{2}$, $k = 7$**

$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

$P(X = x) = n\,C_x\, p^x q^{n-x}$ [$n = 9$, $x = 7$, $n - x = 9 - 7 = 2$]

$P(X = 7) = 9C_7 (\frac{1}{2})^7 (\frac{1}{2})^2$

---

3. கீழ்க்காணும் சோதனைகளில் ஈருறுப்பு பரவலைப் பயன்படுத்தி சமவாய்ப்பு மாறி X - ன் சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க .

(i) 100 தடவை ஒரு சீரான நாணயம் சுண்டப்படுகிறது. தலைகளின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது.

(ii) (ii) 240 தடவை ஒரு சீரான பகடை சுண்டப்படுகிறது . எண் நான்கு தோன்றுவதற்கான எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது.

தீர்வு:

(i) கொடுக்கப்பட்ட $n = 100$

$p = \frac{1}{2}$; $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

சராசரி $= np = 100 \times \frac{1}{2} = 50$

பரவற்படி $= npq = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25.$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட $n = 240$ மேலும், X- என்பது எண் நான்கு தோன்றுவதற்கான எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது.

$p = \frac{1}{6}$ [$\because$ 4 ஒருமுறை மட்டும் தோன்றும்]

$\therefore$ சராசரி $= 240 \times \frac{1}{6} = 40$

பரவற்படி $= npq = 240 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$ $\left[\because q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\right]$

பரவற்படி $= \frac{100}{3}$

---

4. ஒரு மின்சோதனையில் ஒரு குறிப்பிட்ட சாதனத்தின் தாங்கும் திறனுக்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{4}$. சோதிக்கப்பட ஐந்தில் சரியாக மூன்று சாதனங்களின் தாங்கு திறனுக்கான நிகழ்தகவைக் கண்டறிக.

தீர்வு:

$n = 5$; $p = \frac{3}{4}$; $q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$; $x = 3$; **$5C_3 = \frac{5.4.3}{3.2.1} = 10$**

$P(X = x) = n\,C_x\, p^x q^{n-x}$ [$n = 5$, $x = 3$, $n - x = 5 - 3 = 2$]

$P(X = 3) = 5C_3 (\frac{3}{4})^3 (\frac{1}{4})^2 = 10 \frac{3^3}{4^5} = \frac{270}{1024}$

---

3 - மதிப்பெண்கள்

பயிற்சி 11.1

52 சீட்டுகட்டுகளை உடைய ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து இரு சீட்டுகள் ஓரே சமயத்தில் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு எடுக்கப்பட்ட சீட்டுகள் கருப்பாக இருப்பின் சமவாய்ப்பு மாறியான X-இன் மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு:

கூறுவெளி s = 26 கருப்பு ச்ட்டுகள், 26 சிவப்பு சீட்டிகள்

X எடுக்கப்பட்ட கருப்பு சீட்டுகள் என்க.

X (கருப்பு சீட்டு இல்லை) = $26C_2 = \frac{26 \times 25}{2 \times 1} = 325$

(இரண்டு சிவப்பு சீட்டுகள் எடுத்தல்)

X(1 கருப்பு சீட்டு) $= 26 \times 26 = 676$

[1 கருப்பு ச்ட்டு மற்றும் சிவப்பு சீட்டு]

X (2 கருப்பு சீட்டுகள்) = $26C_2 = \frac{26 \times 25}{2 \times 1} = 325$

(இரண்டு (கருப்பு சீட்டு எடுத்தல்]

$\therefore$ X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0,1,2.

X	0	1	2	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	325	676	325	1326

பயிற்சி 11.2

1. ஓர் ஆறுபக்க பகடையின் ஒரு பக்கத்தில் ‘1’ எனவும், இரு பக்கங்களில் ‘3’ மூன்று எனவும், மற்றும் ஏனைய மூன்று பக்கங்களில் ‘5’ எனவும் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. பகடை இருமுறை வீசப்படுகிறது. இருமுறை வீசப்பட்டதின் மொத்த எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது.

(i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (ii) குவிவு பரவல் சார்பு

(iii) $P(4 \le X < 10)$ (iv) $P(X \ge 6)$

தீர்வு: எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 2, 4, 6,8,10.

கூறுவெளி S

I/II	1	3	3	5	5	5
1	2	4	4	6	6	6
3	4	6	6	8	8	8
3	4	6	6	8	8	8
5	6	8	8	10	10	10
5	6	8	8	10	10	10
5	6	8	8	10	10	10

கூறுவெளி S -சிலிருந்து நமக்கு கிடைப்பது

X	2	4	6	8	10	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	4	10	12	9	36

$P(X=2)=\frac{1}{36}$;

$P(X=4)=\frac{4}{36}$;

$P(X=6)=\frac{10}{36}$;

$P(X=8)=\frac{12}{36}$;

$P(X=10)=\frac{9}{36}$

(i) நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு

x	2	4	6	8	10	மொத்தம்
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1

(ii) குவிவு பரவல் சார்பு

$F(X=x)=p(X\le x)$

$F(2)=\frac{1}{36}$

$F(4)=\frac{1}{36}+\frac{4}{36}=\frac{5}{36}$

$F(6)=\frac{1}{36}+\frac{4}{36}+\frac{10}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

$F(8)=\frac{15}{36}+\frac{12}{36}=\frac{27}{36}=\frac{9}{12}=\frac{3}{14}$

$F(10)=\frac{27}{36}+\frac{9}{36}=\frac{36}{36}=1$

$\because$ குவிவு பரவல் சார்பு $F(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ \frac{5}{36}, & x\le 2\\ \frac{5}{12}, & x\le 0\\ \frac{3}{4}, & x\le 8\\ 1, & x\le 10\end{cases}$

(iii) $p(4\le x<10)=p(x=4)+p(x=6)+p(x=8)$

$=\frac{1}{9}+\frac{5}{18}+\frac{1}{2}\ =\frac{2+5+6}{18}=\frac{13}{18}$

(iv) $p(x\ge 6)=p(x=6)+p(x=8)+(p=10)$

$=\frac{5}{18}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{31}{36}$

பயிற்சி 11.4-கேள்வி 1.

கீழ்க்காணும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்புகளுக்கு சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.

(i) $\mathbf{f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10} & x=2,5\\ \frac{1}{5} & x=0,1,3,4\end{cases}}$

(ii) $\mathbf{f(x)=\left\{\frac{4-x}{6} x=1,2,3\right.}$

(iii) $\mathbf{f(x)=\begin{cases}2(x-1) & 1<x<2\\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு}\end{cases}}$

(iv) $\mathbf{f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு}\end{cases}}$

தீர்வு:

(i) கொடுக்கப்பட்ட $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10} & x=2,5\\ \frac{1}{5} & x=0,1,3,4\end{cases}$

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	1/5	1/5	1/10	1/5	1/5	1/10

சராசரி $E(X)=\Sigma xf(x)=0+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}$

$=\frac{9}{5}+\frac{1}{2}=\frac{18+5}{10}=\frac{23}{10}=2.3$

$E(X^2)=\Sigma x^2f(x)=0+\frac{1}{5}+\frac{4}{10}+\frac{9}{5}+\frac{16}{5}+\frac{25}{10}$

$=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{9}{5}+\frac{16}{5}+\frac{5}{2}=\frac{28}{5}+\frac{5}{2}=\frac{81}{10}=8.1$

பரவற்படி $=E(X^2)-[E(X)]^2$

$=8.1-(2.3)^2=8.1-5.29=2.81$

(ii) **கொடுக்கப்பட்ட** $\mathbf{f(x)=\frac{4-x}{6}, x=1,2,3}$

$f(1)=\frac{4-1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ & $f(2)=\frac{4-2}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ & $f(3)=\frac{4-3}{6}=\frac{1}{6}$

: நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

x	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

சராசரி $=\Sigma(X)=\Sigma xf(x)=1\left(\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{6}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{6}=\frac{3+4+3}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}=1.67$

$E(x^2)=\Sigma x^2f(x)=1^2\left(\frac{1}{2}\right)+2^2\left(\frac{1}{3}\right)+3^2\left(\frac{1}{6}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{6}=\frac{3+8+9}{6}=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}=3.33$

$\text{var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{10}{3}-\frac{25}{9}=\frac{30-25}{9}=\frac{5}{9}=0.56$

(iii) $\mathbf{f(x)=\begin{cases}2(x-1) & ,1<x<2\\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு}\end{cases}}$

சராசரி $=E(X)=\int_1^2 xf(x)dx=2\int_1^2 x(x-1)dx$

$=2\left[\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=2\left[\left(\left[\frac{8}{3}-\frac{4}{2}\right]\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{5}{3}$

$E(x^2)=\int_1^2 x^2f(x)dx=\int_1^2 x^2\cdot 2(x-1)dx$

$=2\int_1^2 (x^3-x^2)dx=2\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_1^2$

$=2\left[\left(4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\right]=2\left[\frac{4}{3}+\frac{1}{12}\right]=2\left[\frac{16+1}{12}\right]=\frac{17}{6}$

$\therefore \text{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{17}{6}-(\frac{5}{3}\}^2=\frac{17}{6}-\frac{25}{9}\ =\frac{51-50}{18}=\frac{1}{18}$

(iv) **கொடுக்கப்பட்ட**

$\mathbf{f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு}\end{cases}}$

$\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} x\cdot e^{\frac{-x}{2}}dx \qquad \left[\int_0^{\infty} e^{-ax}\cdot x^n dx=\frac{n!}{a^{n+1}}\right]$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1!}{\left(\frac{-1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{1}=2$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx=\int_0^{\infty} x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\times\frac{2!}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}\times 2\times 8=8$

$\therefore \text{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=8-2^2=8-4=4$

கேள்வி 2.

நான்கு சிவப்பு பந்துகள் மற்றும் மூன்று கருப்பு பந்துகள் கொண்ட ஒரு கூடையிலிருந்து பதிலீடாக இடாது அடுத்தடுத்து இரு பந்துகள் வெளியில் எடுக்கப்படுகின்றன. சிவப்பு பந்து வெளியில் எடுக்கும் சாத்திய கூறுகளை X என்க. X-ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பையும் சராசரியையும் காண்க.

தீர்வு: கூறுவெளி $=\{4R, 3B\}$

X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0, 1, 2

$P(X=0)=P(\text{ சிவப்பு பந்து இல்லை})=\frac{3C_2}{7C_2}=\frac{3\times2}{7\times6}=\frac{1}{7}$

$P(X=1)=P(1\text{ சிவப்பு பந்து})=\frac{3C_1\times4C_1}{7C_2}=\frac{12}{\frac{7\times6}{2\times1}}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

$P(X=2)=P(2\text{ சிவப்பு பந்து })=\frac{4C_2}{7C_2}=\frac{4\times3}{7\times6}=\frac{12}{7\times6}=\frac{2}{7}$

$\therefore$: நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு:

x	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

$E(X)=\Sigma x\cdot f(x)=0\left(\frac{1}{7}\right)+1\left(\frac{4}{7}\right)+2\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}=\frac{8}{7}$

கேள்வி 3.

μ மற்றும் σ^2 ஆகியவை முறையே தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் சராசரி மற்றும் பரவற்படி மற்றும் $E(X+3)=10$ மற்றும் $E(X+3)^2=116$, எனில் 4 மற்றும் 5 காண்க.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட $E(X+3)=10$

$\Rightarrow E(X)+3=10 \;\; \Rightarrow E(X)=7 \;\Rightarrow \mu=7 \;\; ---(1)$

$E(X+3)^2=116 \;\;\; \Rightarrow E(X^2+6X+9)=116$

$\Rightarrow E(X^2)+6E(X)+9=116 [\because E(9)=9)$

$\Rightarrow E(X^2)+6(7)+9=116$

$E(X^2)= 116-42-9=116-51 \Rightarrow E(X^2)=65$

$\text{Var}(X)=E(X^2)-E(X)^2 = 65-7^2=65-49=16$

$\therefore u=7$ மற்றும் $\sigma^2=16$.

கேள்வி 4.

நான்கு சீரான நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டப்படுக்ன்றன. தலைகளின் எண்ணிக்கை நிகழ்விற்கு நிகழ்தகவு நிறை சார்பு, சராசரி , மற்றும் பரவற்படி காண்க.

தீர்வு:

X என்பது தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது.

X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0,1,2,3,4.

$\left[\because p(T)=\frac{1}{2}, p(H)=\frac{1}{2}\right]$

$p(X=(0)=p($ தலை இல்லை $)=p(TTT)=\frac{1}{16}\}$

$p(X=1)=p(1$ தலை $)=4C_1\times\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$

$p(X=2)=p(2$ தலைகள்$)= 4C_2\times\frac{1}{16}=\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{1}{16}=\frac{3}{8}$

$p(X=3)=p(3$ தலைகள் $)=4C_3\times\frac{1}{16}=4\times\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$

$p(X=4)=p(4$ தலைகள் $)=4C_4\times\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$

$\therefore$ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

x	0	1	2	3	4
f(x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$\therefore$ சராசரி $=E(X)=\Sigma xf(x)=0\left(\frac{1}{16}\right)+1\left(\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{3}{8}\right)+3\left(\frac{1}{4}\right)+4\left(\frac{1}{16}\right)$

$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{8}{4}=2$

$E(X^2)=\Sigma x^2f(x) \;=0^2\left(\frac{1}{16}\right)+1^2\left(\frac{1}{4}\right)+2^2\left(\frac{3}{8}\right)+3^2\left(\frac{1}{4}\right)+4^2\left(\frac{1}{16}\right)$

$=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+1=\frac{1+6+9+4}{4}=\frac{20}{4}=5$

$\therefore \text{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \;=5-2^2=5-4=1$

கேள்வி 7.

சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் சராசரி நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x)=\begin{cases}16xe^{-4x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$ ஆகும் சமவாய்ப்பு மாறி X -ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $f(x)=\begin{cases}16xe^{-4x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$

சராசரி $=E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_0^{\infty} x\cdot 16x\cdot e^{-4x}dx$

$=16\int_0^{\infty} x^2e^{-4x}dx=16\times\frac{2!}{4^3}=16\times\frac{2}{64}=\frac{1}{2} \;\left[\because \int_0^{\infty} x^ne^{-ax}dx=\frac{n!}{a^{n+1}}\right]$

$E(x^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx$

$=\int_0^{\infty} x^2\cdot 16\,x\,e^{-4x}dx$

$=16\int_0^{\infty} x^3e^{-4r}dx=16\times\frac{3!}{4^4}=\frac{16\times3\times22}{x+16\times16}=\frac{3}{8}$

$\therefore \text{Var}(X)=E(X^2)-[E(x)]^2=\frac{3}{8}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{3-2}{8}=\frac{1}{8}$

$\therefore \text{Var}(X)=\frac{1}{8}$

கேள்வி 8.

600 டிக்கெட்டுகள் கொண்ட ஒரு லாட்டரியில் ஒரு பரிசு ₹ 200 - க்கும் நான்கு பரிசுகள் ₹100 -க்கும், ஆறு பரிசுகள் ₹ 50 -க்கும் எனக்கொடுக்கிறது . டிக்கெட் செலவு ₹2 என்றால், ஒரு டிக்கெட்டின் எதிர்பார்க்கப்படும் வெற்றி தொகையைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு:

x	200	100	50
f(x)	1/600	4/600	6/600

$\therefore E(X)=\Sigma xf(x)=\frac{200}{600}+\frac{400}{600}+\frac{300}{600}=\frac{900}{600}=1.5$

வெற்றி தொகை$= 1.50-2.00=-0.50$

ie., Loss of Rs. 0.50

பயிற்சி 11.5- கேள்வி 2.

எந்த முயற்சியிலும் ஒரு இலக்கைத் திரு.Q தாக்க நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ ஆகும் . பத்து முறை இலக்கை அவர் தாக்க முயற்சிக்கிறார் எனக் கொள்க . இலக்கைத் தாக்க (i) சரியாக 4 முறைகள் (ii) குறைந்தபட்சம் ஒரு முறை தாக்குவதற்கு ஆகியவற்றிற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $P($ இலக்கத்தை தாக்க $)=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow p=\frac{1}{4} \;\;\; n=10.\; q=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(i) $P(X=x)=nc_x\,p^xq^{n-x}, \;\;\; x=0,1,2,\ldots\ldots.n$

$P(x=4)=10C_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^6$

(ii) P(குறைந்தபட்சம் ஒரு முறை)

$=P(X\ge1)=1-P(X<1)$

$=1-P(X=0)=1-10C_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10} =1-1(1)\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

$P(X\ge1)=1-\frac{3^{10}}{4^{10}}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

கேள்வி 5.

ஒரு உற்பத்தியாளரிடமிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட மின்வகைக் கருவியை ஒரு விற்பனையாளர் கொள்முதல் செய்கிறார் . உற்பத்தியாளர் கருவியின் பழுதாகும் சதவீதம் 5% எனக் கூறுகிறார். கொள்முதல் செய்யப்பட்ட சரக்கிலிருந்து 10 பொருட்களை விற்பனையாளரின் பரிசோதகர் சமவாய்ப்பு முறையில் பரிசோதிக்கிறார். அவற்றுள் (i) குறைந்தபட்சம் ஒரு பழுதான பொருள் (ii) சரியாக இரு பொருட்கள் பழுதாக இருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு : $n=10, P=5\%=\frac{5}{100}; \;\;\; q=1-\frac{5}{100}=\frac{95}{100}$

(i) $P(X\ge1)=1-P(X<1)$

$=1-P(X=0)=1-10C_0\left(\frac{5}{100}\right)^0\left(\frac{95}{100}\right)^{10-0}$

$P(X\ge1)=1-\left(\frac{95}{100}\right)^{10} =1-(0.95)^{10}$

(ii) $P(X=2)=10C_2\left(\frac{5}{100}\right)^2\left(\frac{95}{100}\right)^{10-2}=\frac{10X9}{2X1}(0.05)^2\left(\frac{95}{100}\right)^8$

$P(X=2)=45(0.05)^2(0.95)^8$

கேள்வி 8.

$4P(X=4)=P(X=2)$ மற்றும் $n=6$ எனும்படி உள்ள $X \sim B(n,p)$ -ன் பரவலின், சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட $4P(X=4)=P(X=2)$ மற்றும் $n=6$.

$4[6C_4p^4(q)^2]=6C_2p^2(q)^4$

$\Rightarrow 4\,p^4(q)^2 = \; p^2(q)^4$

$\Rightarrow 4\,p^2(q)^2[4\times p^2]=p^2(q)^4$

$\Rightarrow 4p^2=q^2=(1-p)^2$

$\Rightarrow 4p^2=1+p^2-2p \;\; \Rightarrow 3p^2+2p-1=0$

$\Rightarrow (p+1)(3p-1)=0$

$p=-1,\ p=\frac{1}{3}$ [$\because p=-1$ க்கு] சாத்தியமில்லை]

$\therefore$ ஈருறுப்பு பரவல்: $\mathbf{B(6,\frac{1}{3})}$

(i) $P(X=x)=6C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}, x=0,1,2-$

(ii) சராசரி $=np=6\times\frac{1}{3}=2$

(iii) திட்ட விலக்கம் $=\sqrt{npq}=\sqrt{6\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}} \;=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

கேள்வி 9.

5 சார்பற்ற சோதனைகளை உடைய ஒரு ஈருறுப்பு பரவலின் 1 மற்றும் 2 வெற்றிக்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.4096 மற்றும் 0.2048 ஆகும். ஈருப்பு பரவலின் சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட $n=5$ மற்றும்

$P(X=1)=0.4096 \Rightarrow 5C_1p^1q^4=5pq^4=0.4096$ –(1)

$P(X=2)=0.2048 \Rightarrow 5C_2p^2q^3=10p^2q^3=0.2048$-(2)

(1)/(2)

$\Rightarrow \frac{5pq^4}{10p^2q^3}=\frac{0.4096}{0.2048}$

$\frac{q}{2p}=2 \Rightarrow q=4p \Rightarrow 1-p=4p$ $[\because q=1-p]$

$\Rightarrow 5p=1 \Rightarrow \; p=\frac{1}{5}$

& $q=1-\frac{1}{5}=\frac{5-1}{5}=\frac{4}{5}$

சராசரி $=np=5\times\frac{1}{5}=1$

பரவற்படி $=npq=5\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$

அத்தியாயம்12 - தனி நிலைகணக்குகள்

2 , 3 மற்றும் 5 - மதிப்பெண்கள்

2 - மதிப்பெண்

பயிற்சி 12.1(1)

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களின் மீது வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் $*$ ஓர் ஈருறுப்புச் செயலியா எனத் தீர்மானிக்க .

(i) R -ன் மீது $a*b=a.|b|$

(ii) A = {1,2,3, 4,5} -ன் மீது a∗b = (a,b)-ல் சிறியது,

(iii) R -ன் மீது (a∗b) = $a\sqrt{b}$

தீர்வு :

(i) a*b=a.|b| மீது R

a, b ∈ R, பிறகு |b| ∈ R, a.|b| ∈ R

⇒ * என்பது R இல் ஈருப்புச் செயலி

(ii) a*b = min(a,b) இல் A = {1,2,3, 4,5}

a, b ∈ A எனலாம்

a∗b = min (a,b) = $\begin{cases} a & \text{if } a \le b \\ b & \text{if } b \le a \end{cases}$

இரண்டிலும் a*b ∈ A

⇒ * என்பது A இல் ஈருப்புச் செயலி

(iii) (a*b) = a√b என்பது R இல்ஈருப்புச் செயலி

a, b ∈R; √b ∉ R [b < 0]

∴ a√b ∉ R

⇒ a*b ∉ R ⇒ R இல் * ஒரு ஈருப்புச் செயலி அல்ல

பயிற்சி 12.1 (2).

Z -ன் மீது ⊗ என்ற செயலி பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(m⊗ n)= m^n+n^m : ∀m, n ∈ Z ∗ ஆனது Z – ன் மீது அடைவுப் பண்பை பெற்றுள்ளதா?

தீர்வு :

m, n ∈ Z , m > 0 மற்றும் n < 0 பின்னர் $m^n \notin Z$

⇒ (m⊗n)= $m^n+n^m \notin Z$,

∴ ⊗ என்பது Z இல் ஈருப்புச் செயலி அல்ல

பயிற்சி 12.1 (3).

R -ன் மீது ∗ ஆனது (a∗b) = a + b + ab − 7 என வரையறுக்கப்பட்டால் ∗ , R -ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளதா? அவ்வாறெனில், $3*\left(\frac{-7}{15}\right)$ காண்க.

தீர்வு : a, b ∈ R, பின்னர் ab ∈ R

∴ a + b + ab – 7 ∈ R ⇒ (a∗b) = a + b + ab – 7 ∈ R

⇒ * என்பது R இல் ஈருப்புச் செயலி

$3*\left(\frac{-7}{15}\right)=3+\left(\frac{-7}{15}\right)+3\left(\frac{-7}{15}\right)-7$

$=3-\frac{7}{15}-\frac{21}{15}-7=\frac{45-7-21-105}{15} \;=\; \frac{-88}{15}$

---

4. A = {a + $\sqrt{5}$b : a,b∈ Z} என்க . வழக்கமான பெருக்கல் A -ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயல் ஆகுமா என பரிசோதிக்க

தீர்வு :

a + $\sqrt{5}$b, c + $\sqrt{5}$d ∈ A; a,b,c,d ∈ Z

(a + $\sqrt{5}$b)(c + $\sqrt{5}$d)= ac + $\sqrt{5}$ ad + $\sqrt{5}$ bc + 5bd)

= (ac + 5bd)+ $\sqrt{5}$(ad+bc) ∈ A

[ac, bd, ad, bc ∈ Z and ac + 5bd, ad + bc ∈ Z]

∴ வழக்கமான பெருக்கல் என்பது A இல் ஈருப்புச் செயலி ஆகும்.

---

6. * என்ற ஈருறுப்புச் செயலி ஆனது A = {a, b, c} என்ற கணத்தின் மீது பரிமாற்று விதிக்கு கட்டுப்பட்டால் பின்வரும் பட்டியலைப் பூர்த்தி செய்க.

*	a	b	c
a	b		
b	c	b	a
c	a		c

தீர்வு :

$a * b = b * a = c$
$a * c = c * a = a$
$c * b = b * c = a$

*	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	a
c	a	a	c

7. A = {a, b, c, d} என்ற கணத்தின் மீது * என்ற ஈருறுப்புச் செயலியை பின்வரும் பட்டியலுடன் கருதுக.

*	a	b	c	d
A	a	c	b	d
B	d	a	b	c
C	c	d	a	a
D	d	b	a	c

இது மாற்றுப்பண்பு மற்றும் சேர்ப்புப் பண்புகளைப் பெற்றுள்ளதா?

தீர்வு:

*	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	a
d	d	b	a	c

கொடுக்கப்பட்ட A = {a, b, c, d} மற்றும் * பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது

அட்டவணையிலிருந்து

(i) a * b = C மற்றும் b* a = d

⇒ A இல் * பரிமாற்று பண்பை பெறவில்லை .

(ii) a * (b * c) = (a * b) * C என்பதை சரிபார்க்க

⇒ a * (b) = c * c ⇒ c ≠ a

∴ A இல் * ஆனது சேர்ப்பு பண்பை நிறைவு செய்யவில்லை.

பயிற்சி 12.2 (1)

p என்பது " ஜுபிடர் ஒரு கோளாகும் " மற்றும் q என்பது " இந்தியா ஒரு தீவு ". பின்வரும் கூற்றுகளுக்குரிய வார்த்தைகளுடன் கூடிய வாக்கியங்களை அமைக்க .

(i) ¬p (ii) p ∧ ¬q (iii) ¬p ∨ q (iv) p→¬q (v) p↔q

தீர்வு :

(i) ¬p : வியாழன் ஒரு கிரகம் அல்ல

(ii) p ∧ ¬q: வியாழன் ஒரு கிரகம் மற்றும் இந்தியா ஒரு தீவு அல்ல

(iii) ¬p Vq: வியாழன் ஒரு கிரகம் அல்ல அல்லது இந்தியா ஒரு தீவு

(iv) p→¬q : வியாழன் ஒரு கிரகம் என்றால் இந்தியா ஒரு தீவு அல்ல

(v) p↔q : இந்தியா ஒரு தீவாக இருந்தால் மட்டும் வியாழன் கிரகம் அல்ல

பயிற்சி 12.2(2)

p மற்றும் q என்ற கூற்று மாறிகளைக் கொண்டு பின்வரும் ஒவ்வொரு வாக்கியத்தையும் குறியீட்டு அமைப்பில் எழுதுக.

தீர்வு :

(i) 19 ஒரு பகா எண் அல்ல மற்றும் ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்து கோணங்கள் சமம்
¬p ∧ q

(ii) 19 ஒரு பகா எண் அல்லது ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்து கோணங்களும் சமமல்ல . **p v¬ q**

(iii) 19 ஒரு பகா எண் மற்றும் ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்து கோணங்களும் சமம். **p ∧ q**

(iv) 19 ஒரு பகா எண் அல்ல . **¬p**

3 மதிப்பெண் வினாக்கள்

பயிற்சி 12.1

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

என்பவைகள் ஒரே மாதிரியான வகையினை உடைய ஏதேனும் மூன்று பூலியன் அணிகள் எனில், (i) A ∨ B (ii) A ∧ B (iii) (A ∨ B) ∧ C (iv) (A ∧ B) ∨ C ஆகியவைகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A \vee B=\begin{pmatrix}1010\\0101\\1001\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0101\\1010\\1001\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\vee 0&0\vee 1&1\vee 0&0\vee 1\\0\vee 1&1\vee 0&0\vee 1&1\vee 0\\1\vee 1&0\vee 0&0\vee 0&1\vee 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A\wedge B=\begin{pmatrix}1010\\0101\\1001\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0101\\1010\\1001\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\wedge 0&0\wedge 1&1\wedge 0&0\wedge 1\\0\wedge 1&1\wedge 0&0\wedge 1&1\wedge 0\\1\wedge 1&0\wedge 0&0\wedge 0&1\wedge 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(A\vee B)\wedge C=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1101\\0110\\1111\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\wedge 1&1\wedge 1&1\wedge 0&1\wedge 1\\1\wedge 0&1\wedge 1&1\wedge 1&1\wedge 0\\1\wedge 1&0\wedge 1&0\wedge 1&1\wedge 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(A\wedge B)\vee C=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}1101\\0110\\1111\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\vee 1&0\vee 1&0\vee 0&0\vee 1\\0\vee 0&0\vee 1&0\vee 1&0\vee 0\\1\vee 1&0\vee 1&0\vee 1&1\vee 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

பயிற்சி 12.2 (5)

பின்வரும் கூற்றுகள் சம்பந்தமான மறுதலை , எதிர்மறை மற்றும் நேர்மாறுகளை எழுதுக.

(i) x , y என்ற எண்கள் x = y என்றவாறு உள்ளது எனில், பின்னர் $x^2 = y^2$.

தீர்வு :(i) நிபந்தனை கூற்று: p → q

x மற்றும் y என்பது x = y போன்ற எண்களாக இருந்தால், $x^2 = y^2$

(ii) மறுதலை கூற்று : q → p .

x மற்றும் y என்பது $x^2 = y^2$ எண்களாக இருந்தால் x = y

(iii) தலைகீழ் கூற்று: ¬p → ¬q

x மற்றும் y என்பது x ≠ y போன்ற எண்களாக இருந்தால், $x^2 \neq y^2$

(iv) முரண்பாடு கூற்று: ¬q → ¬p

x மற்றும் y என்பது $x^2 \neq y^2$ எண்களாக இருந்தால் x ≠ y

பயிற்சி 12.2

(5) (ii) பின்வரும் கூற்றுகள் சம்பந்தமான மறுதலை , எதிர்மறை மற்றும் நேர்மாறுகளை எழுதுக.

ஒரு நாற்கரம் ஒரு சதுரம் எனில், பின்னர் இது ஒரு செவ்வகமாகும்.

தீர்வு :

(i) நிபந்தனை கூற்று: $p \to q$

ஒரு நாற்கரம் ஒரு சதுரம் என்றால் அது ஒரு செவ்வகம்

(ii) மறுதலை கூற்று : $q \to p$.

ஒரு நாற்கரமானது ஒரு செவ்வகமாக இருந்தால் அது ஒரு சதுரமாகும்

(iii) தலைகீழ் கூற்று : $\neg p \to \neg q$

ஒரு நாற்கரமானது ஒரு சதுரம் இல்லை என்றால் அது ஒரு செவ்வகம் அல்ல

(iv) முரண்பாடு கூற்று : $\neg q \to \neg p$

ஒரு நாற்கரமானது ஒரு செவ்வகம் அல்ல என்றால் அது ஒரு சதுரம் அல்ல

5 (i) $*$ என்ற ஓர் ஈருறுப்புச் செயலி $\mathbb{Q}$ -ன் மீது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது இந்த $*$ ஆனது , அடைவுப் பண்பு, பரிமாற்றுப் பண்பு, சேர்ப்புப் பண்பு ஆகியவற்றை நிறைவு செய்கிறதா எனச் சோதிக்க . $\mathbf{a * b = \left(\frac{a+b}{2}\right)}$; $\mathbf{a, b \in \mathbb{Q}}$.

(ii) $*$ ஆனது, சமனிப் பண்பு மற்றும் எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவை , $\mathbb{Q}$ -ன் மீது உண்மையாகுமா எனச் சோதிக்க .

$\mathbf{a * b = \left(\frac{a+b}{2}\right)}$; $\mathbf{a, b \in \mathbb{Q}}$.

தீர்வு :

i . a , b என்பது விகிதமுறு எண்கள் எனில் $\frac{a+b}{2}$ விகிதமுறு எண்கள் . அடைவுப் பண்பு உண்மையாகிறது

ii $a * b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b * a$

எனவே $*$ பரிமாற்றப் பண்பு உண்மையாகிறது

iii . $a * (b * c) = a * \left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4}$

$(a * b) * c = \left(\frac{a+b}{2}\right) * c = \frac{\frac{a+b}{2} + C}{2} = \frac{a+b+2c}{4}$

சேர்ப்புப் பண்பு உண்மை அல்ல

iv. $a * e = a \Rightarrow \frac{a+e}{2} = a$

$\Rightarrow a + e = 2a \quad \Rightarrow e = 2a - a = a$

சமனிப் பண்பு உண்மை அல்ல

எதிர்மறைப் பண்பு உண்மை அல்ல

பயிற்சி 12.2 (6)

பின்வரும் கூற்றுகளுக்கு மெய்மை அட்டவணைகளை அமைக்க .

(i) ¬p ∧ ¬q

தீர்வு :

p	q	¬p	¬q	¬p∧¬q
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

பயிற்சி 12.2 (6): பின்வரும் கூற்றுகளுக்கு மெய்மை அட்டவணைகளை அமைக்க (ii) ¬(p∧¬q)

தீர்வு :

p	q	¬q	p ∧ ¬q	¬(p∧¬q)
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

பயிற்சி 12.2 (6):

பின்வரும் கூற்றுகளுக்கு மெய்மை அட்டவணைகளை அமைக்க (iii) (p ∨q) ∨ ¬q

தீர்வு :

p	q	¬q	p ∨ q	(p ∨ q) ∨ ¬q
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T

பயிற்சி 12.2 (6):

பின்வரும் கூற்றுகளுக்கு மெய்மை அட்டவணைகளை அமைக்க .(iv) (¬p→r) ∧(p↔q)

தீர்வு :

p	q	r	¬ p	T→F F ¬p→r	T → F F F ← T F p↔q	(¬p→r)∧(p↔q)
T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	F

பயிற்சி 12.2: (7)

பின்வரும் கூட்டு கூற்றுகளில் எவைகள் மெய்மம் அல்லது முரண்பாடுகள் அல்லது நிச்சயமின்மை என்று காண்க. (i) (p∧q)∧¬(p∨q)

தீர்வு :

p	q	p∧q	p∨q	¬(p∨q)	(p∧q) ∧ ¬(p∨q)
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

இது ஒரு முரண்பாடான கூற்றாகும் .

பயிற்சி 12.2: (7)

பின்வரும் கூட்டு கூற்றுகளில் எவைகள் மெய்மம் அல்லது முரண்பாடுகள் அல்லது நிச்சயமின்மை என்று காண்க. :

(ii)((p∨q) ∧¬p)→q தீர்வு :

p	q	p∨q	¬ p	(p∨q) ∧ ¬p	T → F F ((p∨q) ∧¬p) → q
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

இது ஒரு மெய்மம் கூற்றாகும்

பயிற்சி 12.2: (7)

பின்வரும் கூட்டு கூற்றுகளில் எவைகள் மெய்மம் அல்லது முரண்பாடுகள் அல்லது நிச்சயமின்மை என்று காண்க :

(iii) (p→q)↔(¬p→q)

தீர்வு :

p	q	T→F F p→q	¬p	T → F F ¬p → q	T → F F F← T F (p→q)↔(¬p→q)
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F

பயிற்சி 12.2: (7)

பின்வரும் கூட்டு கூற்றுகளில் எவைகள் மெய்மம் அல்லது முரண்பாடுகள் அல்லது நிச்சயமின்மை என்று காண்க.

(iv) ((p→q) ∧(q→r))→(p→r)

தீர்வு :

p	q	r	T →F F p→ q	T →F F q→r	(p→q) ∧(q→r)	T →F F p→r	((p→q) ∧(q→r)) →(p→r)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

இது ஒரு மெய்மம் கூற்றாகும்

பயிற்சி 12.2: (8): (i) ¬(p ∧ q) ≡ ¬p ∨ ¬q எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

p	q	p∧q	L.H.S ¬(p∧q)	¬ p	¬ q	R.H.S ¬p∨¬q
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

L.H.S ≡R.H.S. ¬(p ∧ q) ≡ ¬p ∨ ¬q

பயிற்சி 12.2: (8): (ii) ¬(p→q) ≡ p ∧ ¬q எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

p	q	T→F F p → q	L.H.S ¬(p→q)	¬ q	R.H.S p ∧ ¬q
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F

L.H.S ≡R.H.S. ¬(p→q) ≡ p ∧ ¬q

பயிற்சி 12.2: (9) q→ p ≡ ¬p→¬q என நிறுவுக.

தீர்வு :

p	q	L.H.S T → F F q → p	¬ p	¬ q	R.H.S T → F F ¬p → ¬q
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

L.H.S ≡R.H.S. q→ p ≡ ¬p→¬q

பயிற்சி 12.2: (10):

p → q மற்றும் q → p ஆகியவைகள் சமானமற்றவை எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

p	q	T→F F p → q	T → F F q → p
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

p → q ≢ q → p

பயிற்சி 12.2: (11): ¬(p ↔ q)≡p ↔ ¬q எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

p	q	p ↔ q	¬(p↔q)	¬q	p ↔ ¬q
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	F

L.H.S ≡R.H.S. ¬(p ↔ q)≡p ↔ ¬q

பயிற்சி 12.2: (13): மெய்மை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி ¬(p ∨ q) ∨ (¬p ∧ q) மற்றும் ¬p என்ற கூற்றுகள் தர்க்க சமானமானவை எனச் சோதிக்க .

தீர்வு :

p	q	p∨q	¬(p∨q)	¬p	¬p∧q	¬(p∨q)∨(¬p∧q)
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T

¬(p ∨ q) ∨ (¬p ∧ q) ≡ ¬p நிறுவப்பப்பட்டது

5 - மதிப்பெண்கள்

எடுத்துக்காட்டு 12.9

மட்டுக் கூட்டல் 5 செயலி அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி கணம் $\mathbb{Z}_5$-ன் மீது + $+_5$ என்ற செயலிக்கு
(i) அடைவுப்பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப்பண்பு (iv)சமனிப்பண்புமற்றும் (v)எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவைகளைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு :

$\mathbb{Z}_5 = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ மட்டு 5 கூட்டல் செயலி அட்டவணை

மீதிகளின் கணமானது $\{0,1,2,3,4\}\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ என்ற தொகுப்பு அமைப்பைக் குறிக்கிறது.

$+_5$	0	1	2	3	4
0	**0**	1	2	3	4
1	1	2	3	4	**0**
2	2	3	4	**0**	1
3	3	4	**0**	1	2
4	4	**0**	1	2	3

(i) செயலி அட்டவணையில் உள்ள எல்லா வெற்றிடங்களும் $\mathbb{Z}_5$-ன் சரியாக ஓர் உறுப்பு மூலம் நிரப்பப்பட்டிருந்தால்

$+_5$ ஆனது $\mathbb{Z}_5$-ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளது.

(ii) அட்டவணையில் உள்ள பதிவுகள் முதன்மை மூலைவிட்டத்துடன் சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளதால்

$+_5$ ஆனது பரிமாற்றுப் பண்புடையது .

(iii) $+_5$ ஆனது சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யும் எனக் காட்டலாம்.

(iv) 0 தலைமையிலான நிரை மற்றும் நிரல் ஒரே மாதிரியானவை. எனவே, $0 \in \mathbb{Z}_5$ என்பது சமனி உறுப்பாகும். சமனி பண்பு உண்மை என்பது தெளிவாகிறது.

(V)

உறுப்பு	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
எதிர்மறை	**0**	**4**	**3**	**2**	**1**

எனவே, எதிர்மறைப் பண்பு உண்மை என்பது தெளிவாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 12.10 மட்டு 11 ஐப் பொருத்து எச்சத் தொகுதிகளின் கணம் $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$-இன் உட்கணம் $A = \{1,3,4,5,9\}$-ன் மீது x_{11} என்ற செயலிக்கு (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனிப் பண்பு (v) எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவைகளைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு :

X $_{11}$ என்ற செயலியின் செயலி அட்டவணை

$\times_{11}$	1	3	4	5	9
1	**1**	3	4	5	9
3	3	9	**1**	4	5
4	4	**1**	5	9	3
5	5	4	9	3	**1**
9	9	5	3	**1**	4

(i) பெருக்கல் அட்டவணையில் உள்ள எல்லா வெற்றிடங்களும் *A*-ல் சரியாக ஓர் உறுப்பு மூலம் நிரப்பப்பட்டிருப்பதால் x_{11}, A-ன் மீது அடைவுப் பண்பு பெற்றுள்ளது .

(ii) அட்டவணையில் உள்ள உறுப்புகள் அணைத்தும் முதன்மை மூணைவிட்டத்திற்கு சமச்சீராக இருப்பதால், x_{11} பரிமாற்றுப் பண்புடையதாகும்.

(iii) x_{11} ஆனது சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யும் எனக் காட்டலாம்.

(iv)1 தலைமையிலான நிரை மற்றும் நிரல் ஒரே மாதிரியானவை. எனவே, $1 \in A$ என்பது சமனி உறுப்பாகும். சமனி பண்பு உண்மை என்பது தெளிவாகிறது.

(v)

உறுப்பு	**1**	**3**	**4**	**5**	**9**
எதிர்மறை	**1**	**4**	**3**	**9**	**5**

எனவே, எதிர்மறைப் பண்பு உண்மை என்பது தெளிவாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 12.7

கொடுக்கப்பட்ட கணத்தின்மீது பின்வரும் செயலானது (i) அடைவுப் பண்பு (ii) பரிமாற்றுப் பண்பு (iii) சேர்ப்புப் பண்பு (iv) சமனிப் பண்பு மற்றும் (v) எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவைகளைப் பெற்றிருக்குமா எனச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

$\mathbf{m * n = m + n - mn; m, n \in \mathbb{Z}}$

(i) $m + n - mn$-ன் விளைவு ஆனது ஒரு முழு எண் என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே * ஆனது $\mathbb{Z}$**-ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளது.**

(ii) $m * n = m + n - mn = n + m - nm = n * m, \forall m, n \in \mathbb{Z}$.

*** ஆனது பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு** செய்கிறது.

(iii) $(\mathbf{m * n}) * \mathbf{p} = (m + n - mn) * p$

$= (m + n - mn) + p - (m + n - mn)p$

$= m * n = m + n - mn = n + m - nm = n * m,$

$\mathbf{m} * (\mathbf{n} * \mathbf{p}) = m * (n + p - np)$

$= m + (n + p - np) - m(n + p - np)$

$= m + n + p - np - mn - mp + mnp$

$m * (n * p) = (m * n) * p$.

*** ஆனது சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்கிறது.**

(iii) e என்ற ஒரு முழு எண்ணை

$m * e = e * m = m, \forall m \in \mathbb{Z}$

ஆகவே, $m * e = m \Rightarrow m + e - me = m \Rightarrow e(1 - m) = 0 \Rightarrow e = 0$

(iv) $\mathbf{m' \in \mathbb{Z}}$ **;** $\mathbf{m * m' = m' * m = e = 0, \forall m \in \mathbb{Z}}$

. $m * m' = 0 \Rightarrow m + m' - mm' = 0 \Rightarrow m' = \frac{m}{m-1}$.

$m = 1$ எனும்போது m' ஐ வரையறுக்க முடியாது.

$m = 2$ எனும்பொழுது m' ஒருமுழுஎண். ஆனால் $m = 2$ தவிர m-ன் அனைத்துமதிப்புகளுக்கும் m' ஒரு முழு எண்ணாக இருக்கத்தேவையில்லை.

எனவே, $\mathbb{Z}$-ல் எதிர்மறை அமையாது.

---

5 (i) $*$ என்ற ஓர் ஈருறுப்புச் செயலி $\mathbb{Q}$ -ன் மீது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது இந்த $*$ ஆனது , அடைவுப் பண்பு, பரிமாற்றுப் பண்பு, சேர்ப்புப் பண்பு ஆகியவற்றை நிறைவு செய்கிறதா எனச் சோதிக்க $\mathbf{a * b = \left(\frac{a+b}{2}\right)}$; $\mathbf{a, b \in \mathbb{Q}}$

(ii) * ஆனது, சமனிப் பண்பு மற்றும் எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவை , $\mathbb{Q}$ -ன் மீது உண்மையாகுமா எனச் சோதிக்க .

$\mathbf{a * b = \left(\frac{a+b}{2}\right)}$; $\mathbf{a, b \in \mathbb{Q}}$.

தீர்வு :

i . a , b என்பது விகிதமுறு எண்கள் எனில் $\frac{a+b}{2}$ ஓர் விகிதமுறு எண் ஆகும் .

ii $a * b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b * a$

எனவே $*$ பரிமாற்றப் பண்பு உண்மையாகிறது

iii . $a * (b * c) = a * \left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4}$

$(a * b) * c = \left(\frac{a+b}{2}\right) * c = \frac{\frac{a+b}{2} + C}{2} = \frac{a+b+2c}{4}$

சேர்ப்புப் பண்பு உண்மை அல்ல

iv. $a * e = a \Rightarrow \frac{a+e}{2} = a$

$\Rightarrow a + e = 2a \quad \Rightarrow e = 2a - a = a$

சமனிப் பண்பு உண்மை அல்ல

எதிர்மறைப் பண்பு உண்மை அல்ல

---

10. (i) $A = Q \setminus \{1\}$ என்க. A-ன் மீது* பின்வ (நமமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. $xy = x + y - xy$.

ஒனது A-ன்மீது அடைவு பெற்றுள்ளதா? அவ்வாறெனில், A-ன் மீது ஆனது பரிமாற்று விதி மற்றும் சேர்ப்பு விதிகளை நிறைவு செய்யுமா எனச் சோதிக்க.

(ii) $A = Q \setminus \{1\}$ என்க. A-ன் மீது * பின்வ ருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. xy = $x + y -$xy.

ஆனது A -ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளதா? அவ்வாறெனில், A-ன் மீது ஆனது சமனிப்பண்பு மற்றும் எதிர்மறைப் பண்புகளை நிறைவு செய்யுமா எனச் சோதிக்க.

தீர்வு:

(i) கொடுக்கப்பட்ட $A = \{Q \setminus \{1\}\}$

$x^*y = x + y - xy$ எனுமாறு A இல் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$x, y \neq 1$ என்க $\quad \therefore x^*y = x + y - xy$

இங்கு $x + y - xy \neq 1$

$x + y - xy = 1$ என்க

$y - xy = 1 - x$

$y(1 - x) = 1 - x$

Y = 1

$y = 1$ இது தவறாகும். $[\because x, y \neq 1]$

$\therefore$ நமது அனுமானம் தவறு.

$\therefore x + y - xy \neq 1$

A இல் * ஆனது ஒரு ஈருறுப்புச் செயலி.

பரிமாற்றுப் பண்பு

$x, y \in A \Rightarrow x, y \neq 1$ என்க. .

$\therefore x^*y = x + y - xy'$

மற்றும் $y * x = y + x - yx$

$\Rightarrow x + y = y^*x \quad \forall x, y \in A$.

***க்கு A இல் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.**

சேர்ப்புப் பண்பு $x, y, z \in A \Rightarrow x, y, z + 1$ என்க .

கருது $(x * y) * z = (x + y - xy) * z$

$= x + y - xy + z - (x + y - xy)z = x + y - xy + z - xz - yz + xyz$

$= x + y + z - xy - yz - zx + xyz = x + y + z - yz - x(y + z - yz)$

$= x + y + z - yz - zy - xz + xyz \ldots.. (2)$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $(x^*y)^*z = x * (y * z)$ A இல் *க்கு சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

(ii) சமனி பண்பு

$e \in A$

$x * e = e * x = x \;\Rightarrow x + e - xe = x \Rightarrow e - xe = 0$

$\Rightarrow e(1 - x) = 0 \Rightarrow e = \dfrac{0}{1 - x} = 0 \in A$

சமனி உறுப்புஉண்டு

எதிர்மறை பண்பு

ஒவ்வொரு $x \in A$க்கும் $x' \in A$ ஆனது பின்வருமாறு உள்ள து $x * x' = x' * x = e$

$\Rightarrow x + x' - xx' = 0 \quad [\because e = 0] \Rightarrow x + x'(1 - x) = 0$

$\Rightarrow x'(1 - x) = -x \Rightarrow x' = \frac{-x}{1-x} \quad (x \neq 1)$

$\therefore a \in A$க்கு A இல் எதிர்மறை பண்பு உண்டு.

9. (i) $M = \left\{\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} - \{0\}\right\}$ என்க.
*** என்பது அணிப் பெருக்கல் எனக் கொள்க. * ஆனது M-ன் மீது அடைவு**
பெற்றுள்ளதா எனத் தீர்மானிக்க. அவ்வாறெனில்,
***ஆனது M -ன் மீது பரிமாற்றுப் பண்பு, சேர்ப்புப் பண்புகளையும் நிறைவு**
செய்யுமா என்க் சோதிக்க.
(ii) $M = \left\{\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} - \{0\}\right\} *$ என்பது அணிப் பெருக்கல் எனக் கொள்க.
***ஆனது M -ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளதா எனத் தீர்மானிக்க. அவ்வாறெனில்,**
***னது M -ன் மீது சமனிப்பண்பு, மற்றும் எதிர்மறைப் பண்புகளை நிறைவு செய்யுமா எனவும் சோதிக்க. மற்றும் * என்பது அணி பெருக்கல்**

தீர்வு:

(i) கொடுக்கப்பட்ட $M = \left\{\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} - \{0\}\right\}$
மற்றும் * . என்பது அணி பெருக்கல்
$A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} \in M$ என்க
இங்கு $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\mathbf{A * B} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab+ab & ab+ab \\ ab+ab & ab+ab \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{pmatrix} \in M \ (2ab \neq 0 \text{ as } a \neq 0 \text{ and } b \neq 0)$$

M இல் * ஆனது அடைவுப் பண்புடையது.
பரிமாற்று பண்பு

$$\text{L.H.S. } A * B = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab+ab & ab+ab \\ ab+ab & ab+ab \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{pmatrix}$$
$$\text{R.H.S. } B * A = \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab+ab & ab+ab \\ ab+ab & ab+ab \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{pmatrix}$$

∴ M-ல் *க்கு பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு .
சேர்ப்புப் பண்பு

அணிகள் பெருக்கல் சேர்ப்பு பண்பை பெற்றுள்ளது

∴ M இல் * க்கு சேர்ப்பு பண்பு உண்டு.

(ii) கொடுக்கப்பட் $M = \left\{\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} - \{0\}\right\}$

$$\mathbf{A*E = A} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2ae & 2ae \\ 2ae & 2ae \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \Rightarrow 2ae = a \Rightarrow e = \frac{1}{2} \neq 0$$
$$\therefore E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M$$

∴ M இல் சமனி பண்பு நிறைவு செய்யப்படுகிறது.
எதிர்மறை :

$$\mathbf{A*A' = E} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & a' \\ a' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2aa' & 2aa' \\ 2aa' & 2aa' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow 2aa' = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow a' = \frac{1}{4a} \neq 0 \ (a \neq 0)$$
$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{pmatrix} \in M$$

∴ M இல் எதிர்மறை நிறைவு செய்யப்படுகிறது.

EG 12.19 சமானமானவை பண்புகளைப் பயன்படுத்தி $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ (**பரிமாற்றுப்** பண்பின்படி)
$\equiv (\neg p \wedge (p \vee \neg q)) \vee (q \wedge (p \vee \neg q))$ (பங்கீட்டுப் பண்பின்படி)
$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q)$ (பங்கீட்டுப் பண்பின்படி)
$\equiv \mathbb{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee \mathbb{F}$; (நிரப்பு விதிப்படி)
$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$; (சமனி விதிப்படி)
$\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$; (பரிமாற்று விதிப்படி)
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின்

எடுத்துக்காட்டு 1.1

$A=\begin{bmatrix}8&-6&2\\-6&7&-4\\2&-4&3\end{bmatrix}$ எனில் A(adjA)=(adjA)A=|A| I_3 என்பதைச் சரிபார்க்க.

எடுத்துக்காட்டு 1.10

A = $\begin{bmatrix}4&3\\2&5\end{bmatrix}$ எனில் $A^2+xA+yI_2=O_2$ எனுமாறு x மற்றும் y -ஐ காண்க. இதிலிருந்து A^{-1} காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 1.12

A=$\frac{1}{7}\begin{bmatrix}6&-3&a\\b&-2&6\\2&c&3\end{bmatrix}$ என்பது செங்குத்து அணி எனில் a , b மற்றும் c களின் மதிப்பைக் காண்க. இதிலிருந்து A^{-1} -ஐக் காண்க.

பயிற்சி 1.1

3. $F(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&0&\sin\alpha\\0&1&0\\-\sin\alpha&0&\cos\alpha\end{bmatrix}$ எனில், $[F(\alpha)]^{-1}=F(-\alpha)$ எனக்காட்டுக.

4. A = $\begin{bmatrix}5&3\\-1&-2\end{bmatrix}$ எனில், $A^2-3A-7I_2=O_2$ எனக்காட்டுக . இதன் மூலம் A^{-1}காண்க .

எடுத்துக்காட்டு 1.19

$\begin{bmatrix}3&1&4\\2&0&-1\\5&2&1\end{bmatrix}$ என்பது பூச்சியமற்ற அணிக்கோவை அணி எனக்காட்டுக மற்றும் இவ்வணியை தொடக்க நிலை உருமாற்றங்கள் மூலம் அலகு அணியாக மாற்றுக.

எடுத்துக்காட்டு 1.21

A = $\begin{bmatrix}2&1&1\\3&2&1\\2&1&2\end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு காஸ்-ஜோர்டன் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்தி நேர்மாறு காண்க.

பயிற்சி 1.2

3. பின்வரும் அணிகளுக்கு காஸ்-ஜோர்டன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி நேர்மாறு காண்க:

(ii) $\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\6&-2&-3\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}$

எடுத்துக்காட்டு 1.23

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை நேர்மாறு அணி காணல் முறையை பயன்படுத்தி தீர்க்க :$2x_1+3x_2+3x_3=5$, $x_1-2x_2+x_3=-4$, $3x_1-x_2-2x_3=3$

எடுத்துக்காட்டு 1.24

A = $\begin{bmatrix}-4&4&4\\-7&1&3\\5&-3&-1\end{bmatrix}$ மற்றும் B = $\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&-2&-2\\2&1&3\end{bmatrix}$ எனில் பெருக்கற்பலன் AB மற்றும் BA காண்க. இதன் மூலம் $x-y+z=4$, $x-2y-2z=9$, $2x+y+3z=1$ என்ற நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.

பயிற்சி 1.3

1. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளை நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் தீர்க்க:

(iii) $2x+3y-z=9$, $x+y+z=9$, $3x-y-z=1$

(iv) $x+y+z-2=0$, $6x-4y+5z-31=0$, $5x+2y+2z=13$

2. A = $\begin{bmatrix}-5&1&3\\7&1&-5\\1&-1&1\end{bmatrix}$ மற்றும் B = $\begin{bmatrix}1&1&2\\3&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}$ எனில் பெருக்கற்பலன் AB மற்றும் BA காண்க. இதன் மூலம் $x+y+2z=1$, $3x+2y+z=7$, $2x+y+3z=2$ என்ற நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.

5. A,B மற்றும் C என்ற பொருட்களின் விலை ஓர் அலகிற்கு முறையே ₹x,y மற்றும் z ஆகும். P என்பவர் B -ல் 4 அலகுகள் வாங்கி, A-ல் 2 அலகையும் C -ல் 5 அலகையும் விற்கிறார். Q என்பவர் C -ல் 2 அலகுகள் வாங்கி A-ல் 3 அலகுகள் மற்றும் B -ல் 1 அலகையும் விற்கிறார். R என்பவர் A-ல் 1 அலகை வாங்கி, B -ல் 3 அலகையும் C அலகில் ஒரு அலகையும் விற்கிறார். இவ்வணிகத்தில் P,Q மற்றும் R முறையே ₹15,000, ₹1,000 மற்றும் ₹4,000 வருமானம் ஈட்டுகின்றனர் எனில் A,B மற்றும் C பொருட்களின் ஓரலகு விலை எவ்வளவு என்பதைக் காண்க. (நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் இக்கணக்கைத் தீர்க்க.)

எடுத்துக்காட்டு 1.25

$x_1-x_2=3$, $2x_1+3x_2+4x_3=17$, $x_2+2x_3=7$ என்ற நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.26

T20 ஆட்டமொன்றில் கடைசி ஓவரில் 1 பந்து மட்டும் வீசப்பட வேண்டிய நிலையில் ஓர் அணியானது 6 ரன்கள் (ஓட்டங்கள்) பெற்றால் மட்டுமே வெற்றி பெறும் நிலையில் இருந்தது. கடைசி பந்து மட்டையருக்கு வீசப்பட்டது. அவர் அதனை மிக உயரம் செல்லுமாறு அடிக்கிறார். பந்தானது செங்குத்து தளத்தில் சென்ற பாதை அத்தளத்தில் $y=ax^2+bx+c$ என்ற சமன்பாட்டின்படி உள்ளது. பந்தானது (10,8) , (20,16) , (30,18) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்கிறது எனில் அவ்வணியானது ஆட்டத்தை வென்றதா என்பதை முடிவு செய்யலாமா? உனது விடையினை கிராமர் விதியைக் கொண்டு நியாயப்படுத்துக. (எல்லா தொலைவுகளும் மீட்டர் அளவில் உள்ளன. பந்து சென்ற பாதையின் தளமானது மிகத்தொலைவில் உள்ள எல்லைக் கோட்டினை (70,0)என்ற புள்ளியில் சந்திக்கும்)

பயிற்சி 1.4

5. ஒரு குடும்பத்திலுள்ள மூன்று நபர்கள் இரவு உணவு சாப்பிட ஓர் உணவகத்திற்குச் சென்றனர். இரு தோசைகள் , மூன்று இட்லிகள் மற்றும் இரு வடைகளின் விலை ₹150. இரு தோசைகள், இரு இட்லிகள் மற்றும் நான்கு வடைகளின் விலை ₹200. ஐந்து தோசைகள், நான்கு இட்லிகள் மற்றும் இரண்டு வடைகளின் விலை ₹250. அக்குடும்பத்தினரிடம் ₹350 இருந்தது மற்றும் அவர்கள் மூன்று தோசைகள், ஆறு இட்லிகள் மற்றும் ஆறு வடைகள் சாப்பிட்டனர். அக்குடும்பத்தினர் சாப்பிட்ட செலவிற்கான தொகையை அவர்களிடமிருந்த பணத்தைக் கொண்டு செலுத்த முடியுமா? (உமது விடையை கிராமரின் விதிக்கொண்டு நிரூபி)

எடுத்துக்காட்டு 1.27

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையில் தீர்க்க :

$4x + 3y + 6z = 25$, $x + 5y + 7z = 13$, $2x + 9y + z = 1$

எடுத்துக்காட்டு 1.28

ஒரு ராக்கெட்டின் மேல் நோக்கிய வேகம் t நேரத்தில் தோராயமாக $v(t) = at^2 + bt + c$ என்றவாறு உள்ளது. இங்கு $0 \leq t \leq 100$ மற்றும் a , b , c ,என்பன மாறிலிகள். ராக்கெட்டின் வேகம் t = 3 , t = 36 , மற்றும் t = 9 வினாடிகளில் முறையே 64, 133, மற்றும் 208 மைல்கள்/வினாடி எனில் t =15 வினாடியில் அதன் வேகத்தைக் காண்க. (காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்துக).

பயிற்சி 1.5

1. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையில் தீர்க்கவும்:

(i) $2x - 2y + 3z = 2$, $x + 2y - z = 3$, $3x - y + 2z = 1$

(ii) $2x + 4y + 6z = 22$, $3x + 8y + 5z = 27$, $-x + y + 2z = 2$

2. $ax^2 + bx + c$ -ஐ $x + 3$, $x - 5$ மற்றும் x -1 -ஆல் வகுக்கும் போது மீதியானது முறையே 21, 61, மற்றும் 9 எனில் a,b ,மற்றும் c -ஐக் காண்க. (காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையை உபயோகிக்கவும்)

3. ஒரு தொகை ₹65,000 ஆண்டிற்கு முறையே 6%, 8% மற்றும் 9% என்ற வட்டி வீதத்தில் மூன்று பத்திரங்களில் முதலீடு செய்யப்படுகிறது. மொத்த ஆண்டு வருமானம் ₹4,800. மூன்றாவது பத்திரத்தில் கிடைக்கும் வருமானமானது இரண்டாவது பத்திரத்தில் கிடைக்கும் வருமானத்தை விட ₹600 அதிகம் எனில் ஒவ்வொரு பத்திரத்திலும் முதலீடு தொகையைக் காண்க. (காஸ் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்துக).

4. ஒரு சிறுவன் $y = ax^2 + bx + c$ என்ற பாதையில் $(-6,8), (-2,-12)$, மற்றும் $(3,8)$ எனும் புள்ளிகள் வழியாக செல்கிறான். P(7,60) என்ற புள்ளியில் உள்ள அவனுடைய நண்பனை சந்திக்க விரும்புகிறான். அவன் அவனுடைய நண்பனை சந்திப்பானா? (காஸ் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்துக).

எடுத்துக்காட்டு 1.29

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையதா என ஆராய்க. ஒருங்கமைவு உடையதாயின் அவற்றைத் தீர்க்க: $x + 2y - z = 3$, $3x - y + 2z = 1$, $x - 2y + 3z = 3$, $x - y + z + 1 = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 1.30

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையதா என ஆராய்க. ஒருங்கமைவு உடையதாயின் அவற்றைத் தீர்க்க :

$4x - 2y + 6z = 8$, $x + y - 3z = -1$, $15x - 3y + 9z = 21$.

எடுத்துக்காட்டு 1.31

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுதியின் ஒருங்கமைவினைச் சோதிக்கவும், மற்றும் இயலுமாயின் தீர்க்கவும். $x - y + z = -9$, $2x - 2y + 2z = -18$, $3x - 3y + 3z + 27 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 1.32

பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையதா என ஆராய்க.

$x - y + z = -9$, $2x - y + z = 4$, $3x - y + z = 6$, $4x - y + 2z = 7$

எடுத்துக்காட்டு 1.33

$x + y + z = a$, $x + 2y + 3z = b$, $3x + 5y + 7z = c$ என்ற நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் தீர்வுகள் ஒரு சாராமாறிக் குடும்பமாக இருப்பதற்கு a , b மற்றும் c -ல் உருவாகும் நிபந்தனையைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 1. 34

λ , μ -இன் எம்மதிப்புகளுக்கு $x+2y+z=7$, $x+y+\lambda z=\mu$, $x+3y-5z=5$ என்ற சமன்பாடுகள் (i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிறாது (ii) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும் (iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க.

பயிற்சி 1.6

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதா என்பதை ஆராய்க. ஒருங்கமைவு உடையதாயின் அவற்றைத் தீர்க்க

(i) $x-y+2z=2$, $2x+y+4z=7$, $4x-y+z=4$

(ii) $3x+y+z=2$, $x-3y+2z=1$, $7x-y+4z=5$

(iv) $2x-y+z=2$, $6x-3y+3z=6$, $4x-2y+2z=4$

2. k -ன் எம்மதிப்புகளுக்கு பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு $kx-2y+z=1$, $x-2ky+z=-2$, $x-2y+kz=1$

(i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிராது

(ii) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்

(iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க.

4. λ , μ -இன் எம்மதிப்புகளுக்கு $2x+3y+5z=9$, $7x+3y-5z=8$, $2x+3y+\lambda z=\mu$

என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது

(i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிராது

(ii) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்

(iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க.

எடுத்துக்காட்டு 1.36

$x+3y-2z=0$, $2x-y+4z=0$, $x-11y+14z=0$ என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.37

பின்வரும் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும் :

$x+y-2z=0$, $2x-3y+z=0$, $3x-7y+10z=0$, $6x-9y+10z=0$

எடுத்துக்காட்டு 1.38

பின்வரும் தொகுப்பானது வெளிப்படையற்ற தீர்வு பெற்றிருக்குமாயின் λ -ன் மதிப்பு காண்க.

$(3\lambda-8)x+3y+3z=0$, $3x+(3\lambda-8)y+3z=0$,
$3x+3y+(3\lambda-8)z=0$

எடுத்துக்காட்டு 1.39

காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வேதியல் எதிர்வினைச் சமன்பாட்டை சமநிலைப்படுத்துக: $C_5H_8+O_2\to CO_2+H_2O$

(மேற்காணும் எதிர்வினையானது, ஐசோபிரீன் (Isoprene) என்ற கரிம வேதியியல் கூட்டுப் பொருளை எரிப்பதால் நிகழ்வதாகும்).

எடுத்துக்காட்டு 1.40

$px+by+cz=0$, $ax+qy+cz=0$, $ax+by+rz=0$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு வெளிப்படையற்றத் தீர்வு பெற்றுள்ளது மற்றும் $p\neq a, q\neq b, r\neq c$, எனில் $\frac{p}{p-a}+\frac{q}{q-b}+\frac{r}{r-c}=2$ என நிறுவுக.

எடுத்துக்காட்டு 4.4:

$\sin^{-1}(2-3x^2)$ –ன் சார்பகத்தைக் காண்க.

பயிற்சி 4.1- 6(i)

$f(x)=\sin^{-1}\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)$ –ன் சார்பகத்தைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 4.7

$\cos^{-1}\left(\frac{2+\sin x}{3}\right)$ - ன் சார்பகம் காண்க.

பயிற்சி 4.2 - 6(i)

$f(x)=\sin^{-1}\left(\frac{|x|-2}{3}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{1-|x|}{4}\right)$ –ன் சார்பகத்தைக் காண்க.

பயிற்சி 4.3-4(ii)

மதிப்பு காண்க : $\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

பயிற்சி 4.3-4(iii)

மதிப்பு காண்க: $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

எடுத்துக்காட்டு 4.20

மதிப்பிடுக $\sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+\sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right]$

எடுத்துக்காட்டு 4.22

$\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ மற்றும் $0<x,y,z<1$, எனில் $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ எனக் காண்பி.

எடுத்துக்காட்டு 4.23

d-ஐ பொது வித்தியாசமாகக் கொண்டு $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ ஒரு கூட்டுத்தொடர் எனில் ,

$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\ldots+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right)\right]=\frac{a_n-a_1}{1+a_1a_n}$ என நிறுவு.

எடுத்துக்காட்டு 4.27

$6x^2<1$ எனில் , $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4}$, ஐ தீர்க்க ,

எடுத்துக்காட்டு 4.28

தீர்க்க $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$

எடுத்துக்காட்டு 4.29

தீர்க்க $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)=\sin\left\{\cot^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$

பயிற்சி 4.5 - 3(ii)

மதிப்பு காண்க: $\cot\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)$

பயிற்சி 4.5 - 3(iii)

மதிப்பு காண்க: $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$.

பயிற்சி - 10.8

எடுத்துக்காட்டு 10.27

பொருளின் இருப்பின் பெருக்கமானது அதில் காணப்படும் பொருளின் இருப்பின் எண்ணிக்கையின் விகிதமாக அமைந்துள்ளது . பொருளின் இருப்பு 50 ஆண்டுகளில் இரு மடங்காகிறது எனில் , எத்தனை ஆண்டுகளில் பொருளின் இருப்பு மும்மடங்காகும்?

எடுத்துக்காட்டு 10.28

ஆரம்பத்தில் ஒரு கதிரியக்க ஐசோடோப் பின்நிறை 200 மி.கி. ஆகும் . 2 வருடங்களுக்குப் பின்னர் அதன் நிறை 50 மி.கி. ஆக உள்ளது . t நேரத்தில் மீதமுள்ள ஐசோடோப் பின் நிறைக்கான சமன்பாட்டைக் காண்க . அதன் அரை ஆயுட்காலம் எவ்வளவு ? (ஒரு குறிப்பிட்ட கதிரியக்க ஐசோடோப்பின் ஆரம்ப அளவு பாதியாகக் குறைய ஆகும் கால அளவு அரை ஆயுட் காலம் எனப்படும்).

எடுத்துக்காட்டு 10.29

ஒரு துப்பறிவாளர் ஒரு கொலைக்கான புலன் விசாரணையின் போது , ஒருவரின் உயிரற்ற உடலை சரியாக பிற்பகல் 8 மணிக்கு காண்கிறார் . முன்னெச்சரிக்கையாக துப்பறிவாளர் அவ்வுடலின் வெப்பநிலையை அளந்து 70℉ எனக் குறித்துக் கொள்கிறார் . 2 மணி நேரம் கழித்து அந்த உடலின் வெப்பநிலை 60℉ ஆக இருப்பதைக் காண்கிறார் . உடல் இருந்த அறையின் வெப்பநிலை 50 ℉ ஆகும் . மற்றும் இறப்பதற்கு முன்பு அந்நபரின் உடல் வெப்பநிலை 98.6℉ எனில் , அந்நபர் கொலை செய்யப்பட்ட நேரம் என்னவாக இருந்திருக்கும்?

[log(2.43)=0.88789 ; log(0.5)=-0.69315]

எடுத்துக்காட்டு 10.30

ஒரு தொட்டியில் உள்ள 1000 லிட்டர் நீரில் 100 கிராம் உப்பு கரைந்துள்ளது . பிரைன் என்பது அடர்ந்த அடர்த்திக் கொண்ட உப்புக் கரைசலாகும் . வழக்கமாக சோடியம் குளோரைடு கரைசலாகும் . பிரைன் ஒரு நிமிடத்திற்கு 10 லிட்டர் வீதம் உட்புகுத்தப்படுகிறது . மேலும் , ஒவ்வொரு லிட்டர் நீரிலும் 5 கிராம் உப்பு கரைந்துள்ளது . தொட்டியில் உள்ள நீரானது தொடர்ந்து கலக்கப்பட்டு சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளது . பிரைன் ஒரு நிமிடத்திற்கு 10 லிட்டர் வீதம் வெளியேறுகிறது . t நேரத்தில் தொட்டியில் உள்ள உப்பின் அளவைக் காண்க .

பயிற்சி 10.8

1. நுண்ணுயிர்களின் பெருக்கத்தில் , பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கையின் பெருக்க வீதமானது அதில் காணப்படும் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கையின் விகிதமாக உள்ளது . இப்பெருக்கத்தால் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கை மும்மடங்காகிறது எனில் , 10 மணி நேர முடிவில் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை என்னவாக இருக்கும் ?

2. ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை வளர்ச்சி வீதம் t நேரத்தில் உள்ள மக்கள் தொகையின் விகிதமாக

அமைந்துள்ளது . மேலும் நகரத்தின் மக்கள் தொகை 40 ஆண்டுகளில் 3,00,000 லிருந்து 4,00,000 ஆக அதிகரித்துள்ளது எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில் , t நேரத்தில் அந்நகரத்தின் மக்கள் தொகையைக் காண்க.

3. மின்தடை மற்றும் தன் மின் தூண்டல் கொண்ட ஒரு மின் சுற்றின் மின் இயக்கு விசையின் சமன்பாடு $E = Ri + L\frac{di}{dt}$ ஆகும் . இங்கு E என்பது மின் சுற்றுக்கு கொடுக்கப்படும் மின் இயக்கு விசை , R என்பது மின்தடை மற்றும் L என்பது தன் மின் தூண்டல் எண் ஆகும் . E = 0 எனும்போது t நேரத்தில் , மின்சாரம் i ஐக் காண்க .

4. வினாடிக்கு 10 மீட்டர் வேகத்தில் இயங்கும் ஒரு மின்விசைப் படகின் இயந்திரம் நிறுத்தப்படுகிறது . அதன் பின்னர் ஏதேனும் ஒரு நேரத்தில் (இயந்திரம் நிறுத்தப்பட்ட பிறகு) மின் விசைப் படகின் வேகம் குறையும் வீதமானது அந்நேரத்தில் அதன் திசைவேகத்திற்கு சமமாக உள்ளது எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது .

இயந்திரம் நிறுத்தப்பட்ட 2 வினாடிகளுக்குப் பிறகு விசைப்படகின் திசைவேகம் காண்க .

5.வருடத்திற்கு 5% தொடர் கூட்டு வீதத்தில் ஒருவர் ரூபாய் 10,000-த்தை வங்கிக் கணக்கில் முதலீடு செய்கிறார். 18 மாதங்களுக்குப் பின்னர் அவர் வங்கிக் கணக்கில் எவ்வளவு தொகை இருக்கும்?

6. ஒரு மாதிரியில் காணப்படும் கதிரியக்க அணுக்கருக்கள் சிதைவுறும் வீதமானது அந்நேரத்தில் அந்த மாதிரியில் காணப்படும் அணுக்கருக்களின் எண்ணிக்கைக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது . 100 ஆண்டு கால இடைவெளியில் ஒரு மாதிரியில் ஆரம்பத்தில் காணப்படும் கதிரியக்க அணுக்கருக்களின்

எண்ணிக்கையில் 10% சிதைவுறுகிறது . 1000 ஆண்டுகள் முடிவில் ஆரம்பத்தில் காணப்படும் கதிரியக்க அணுக்கருக்களின் எண்ணிக்கையில் எவ்வளவு மீதமிருக்கும் ?

7. வெப்பநிலை 25 ℃ ஆக உள்ள ஒரு அறையில் வைக்கப்பட்டுள்ள நீரின் வெப்பநிலை 100℃ ஆகும் . 10 நிமிடங்களில் நீரின் வெப்பநிலை 80 ℃ ஆகக் குறைந்து விடுகிறது எனில் ,

(i) 20 நிமிடங்களுக்குப் பின்னர் நீரின் வெப்பநிலை

(ii) வெப்பநிலை 40C ஆக இருக்கும்போது நேரம் காண்க.

8. காலை 10.00 மணிக்கு பெண் ஒருவர் தன்னுடைய மைக்ரோ அலை சமையல் அடுப்பிலிருந்து சூடான

காபியை வெளியில் எடுத்து அது குளிர்வதற்காக அருகில் உள்ள சமையல் அறையில் வைக்கிறார் .

அந்நேரத்தில் காபியின் வெப்பநிலை 180°F ஆகும் . மேலும் , 10 நிமிடங்களுக்குப் பிறகு அதன் வெப்பநிலை 160 ℉ ஆகும் . சமையல் அறையின் நிலையான வெப்பநிலை 70℉ எனில்

(i) காலை 10.15 மணிக்கு காபியின் வெப்பநிலைக் காண்க .

(ii) வெப்பநிலை 130 ℉ க்கும் 140 ℉ க்கும் இடைப்பட்டதாக இருக்கும்போது அவர் காபியை அருந்த நினைத்தால் , எந்நேரத்திற்கு இடையில் அவர் காபியை அருந்த வேண்டும்?

9. ஒரு பாத்திரத்தில் 100 ℃ வெப்பநிலையில் கொதித்துக் கொண்டிருக்கும் நீரானது t = 0 எனும் நேரத்தில் அடுப்பின் மீது இருந்து இறக்கி குளிர்வதற்காக சமையலறையில் வைக்கப்படுகிறது . 5 நிமிடங்களுக்குப் பிறகு நீரின் வெப்பநிலை 80 ℃ ஆகக் குறைகிறது . மேலும் , அடுத்த 5 நிமிடங்களுக்குப் பிறகு நீரின்

வெப்பநிலை 65 ℃ ஆக குறைகிறது எனில் , சமையலறையின் வெப்பநிலையைக் காண்க.

10. ஆரம்பத்தில் ஒரு தொட்டியில் 50 லிட்டர் தூய்மையான தண்ணீர் உள்ளது . தொடக்க நேரம் t = 0 -ல் ஒரு லிட்டர் ஒரு லிட்டர் நீரில் 2 கிராம் வீதம் கரைக்கப்பட்ட உப்புக் கரைசலானது ஒரு நிமிடத்திற்கு 3 லிட்டர் வீதம் தொட்டியில் விடப்படுகிறது . இக்கலவையானது தொடர்ந்து கலக்கப்பட்டு சீராக வைக்கப்படுகிறது . மேலும் , அதே நேரத்தில் நன்கு கலக்கப்பட்ட இக்கலவையானது அதே வீதத்தில் தொட்டியிலிருந்து வெளியேறுகிறது . t > 0 எனும் ஏதேனும் ஒரு நேரத்தில் தொட்டியில் உள்ள உப்பின் அளவினைக் காண்க .

அத்தியாயம் - 1

1. $|adj(adj\ A)| = |A|^9$ எனில் , சதுர அணி A - யின் வரிசையானது **Ans :** 4
2. A என்ற 3×3 பூச்சியமற்றக் கோவை அணிக்கு $AA^T = A^T A$ மற்றும் $B = A^{-1}A^T$ என்றவாறு இருப்பின் $BB^T =$ **Ans :** I_3
3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, B = adj A மற்றும் C = 3A எனில் , $\frac{|adj\ B|}{|C|} =$ **Ans :** $\frac{1}{9}$
4. $A\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ எனில் , A = **Ans :** $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
5. $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் , $9I_2 - A =$ **Ans :** $2A^{-1}$
6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ எனில் , $|adj\ (AB)| =$ **Ans :** -80
7. $P = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ என்பது 3×3 வரிசையுடைய அணி A -ன் சேர்ப்பு அணி மற்றும் $|A| = 4$ எனில் , x ஆனது **Ans :** 11
8. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ எனில் , a_{23} -ன் மதிப்பானது **Ans :** -1
9. A , B மற்றும் C என்பன நேர்மாறு காணத்தக்கவாறு ஏதேனுமொரு வரிசையில் இருப்பின் பின்வருவனவற்றில் எது உண்மையல்ல ? **Ans :** adj(AB) = (adj A)(adj B)
10. $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & -17 \\ -19 & 27 \end{bmatrix}$ மற்றும் $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ எனில் , $B^{-1} =$ **Ans :** $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$
11. $A^T A^{-1}$ ஆனது சமச்சீர் எனில் , $A^2 =$ **Ans:** $(A^T)^2$
12. A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி மற்றும் $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ எனில் , $(A^T)^{-1} =$ **Ans :** $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$
13. $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ x & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ மற்றும் $A^T = A^{-1}$ எனில் , x -ன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{-4}{5}$
14. $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $AB = I_2$ எனில் , B = **Ans :** $\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right) A^T$
15. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ மற்றும் $A(adj\ A) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ எனில் , k = **Ans :** 1
16. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ மற்றும் $\lambda A^{-1} = A$ எனில் , λ - ன் மதிப்பு **Ans :** 19
17. $adj\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $adj\ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ எனில் , adj (AB) ஆனது **Ans :** $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}$
18. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ - ன் அணித்தரம் **Ans :** 1
19. $x^a y^b = e^m$, $x^c y^d = e^n$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ எனில் , x மற்றும் y - ன் மதிப்புகள் முறையே , **Ans :** $e^{(\Delta 1/\Delta 3)}$, $e^{(\Delta 2/\Delta 3)}$
20. பின்வருபனவற்றுள் எவை / எவைகள் உண்மையானவை

Ans : (i) ஒரு சமச்சீர் அணியின் சேர்ப்பு அணி சமச்சீராக இருக்கும் .

(ii) ஒரு மூலைவிட்ட அணியின் சேர்ப்பு அணி மூலை விட்ட அணியாக இருக்கும் .

(iii) A(adjA) = (adjA) A = |A| I

21. (A) = ρ ([A | B]) எனில் , AX = B என்ற நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது **Ans :** ஒருங்கமைவுடையது
22. $0 \le \theta \le \pi$ மற்றும் $x + (\sin\theta) y - (\cos\theta)z = 0$, $(\cos\theta)x - y + z = 0$, $(\sin\theta)x + y - z = 0$ மற்றும் தொகுப்பானது வெளிப்படையற்றத் தீர்வு பெற்றிருப்பின் , θ - ன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{\pi}{4}$

23. ஒரு நேரியச் சமன்பாட்டுத் விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியானது $\begin{bmatrix}1 & 2 & 7 & 3\\0 & 1 & 4 & 6\\0 & 0 & \lambda-7 & \mu+5\end{bmatrix}$ மற்றும் தொகுப்பானது எண்ணற்ற தீர்வுகள் பெற்றிருக்கும் எனில் , **Ans :** $\lambda = 7, \mu = -5$

24. $A = \begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 2 & -1\\1 & -1 & 2\end{bmatrix}$ மற்றும் $4B = \begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\1 & 3 & x\\-1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ என்க , A - ன் நேர்மாறு B எனில் , x - ன் மதிப்பு

Ans : 1

25. $A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\2 & -3 & 4\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$, எனில் adj(adj A)- ன் மதிப்பு **Ans :** $\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\2 & -3 & 4\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$

அத்தியாயம் - 2

1. $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$ - ன் மதிப்பு **Ans :** 0

2. $\sum_{i=1}^{13}(i^n + i^{n-1})$ - ன் மதிப்பு **Ans :** 1+ i

3. iz , மற்றும் z + iz என்ற கலப்பெண்கள் ஆர்கன்ட் தளத்தில் உருவாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு **Ans :** $\frac{1}{2}|z|^2$

4. ஒரு கலப்பெண்ணின் இணை கலப்பெண் $\frac{1}{i-2}$ எனில் , அந்த கலப்பெண் **Ans :** $\frac{-1}{i+2}$

5. $z = \frac{(\sqrt{3}+i)^3(3i+4)^2}{(8+6i)^2}$ எனில் , |z| - ன் மதிப்பு **Ans :** 2

6. z எனும் பூஜ்ஜியமற்ற கலப்பெண்ணிற்கு $2iz^2 = \bar{z}$ எனில் , |z| - ன் மதிப்பு **Ans :** ½

7. $|z - 2 + i| \le 2$ எனில் , |z|- ன் மீப்பெரு மதிப்பு **Ans :** $\sqrt{5} + 2$

8. $\left|z - \frac{3}{z}\right| = 2$ எனில் , |z|- ன் மீப்பெரு மதிப்பு **Ans :** 1

9. |z| = 1 எனில் , $\frac{1+z}{1+\bar{z}}$ - ன் மதிப்பு **Ans :** z

10. $|z| - z = 1 + 2i$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு **Ans :** $\frac{3}{2} - 2i$

11. $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$, $|z_3| = 3$, மற்றும் $|9z_1 z_2 + 4z_1 z_3 + z_2 z_3| = 12$ எனில் , $|z_1 + z_2 + z_3|$ - ன் மதிப்பு **Ans :** 2

12. z என்ற கலப்பெண்ணானது $z \in C ¥ R$ ஆகவும் $z + \frac{1}{z} \in R$ எனவும் இருந்தால் , |z|- ன் மதிப்பு **Ans :** 1

13. z_1 , z_2 , மற்றும் z_3 என்ற கலப்பெண்கள் $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ எனவும் $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ ஆகவும் இருந்தால் $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ - ன் மதிப்பு **Ans :** 0

14. $\frac{z-1}{z+1}$ என்பது முழுவதும் கற்பனை எனில் , |z|- ன் மதிப்பு **Ans :** 1

15. z = x + iy என்ற கலப்பெண்ணிற்கு | z + 2 | = | z − 2 | எனில் , z -ன் நியமப்பாதை **Ans :** கற்பனை அச்சு

16. $\frac{3}{-1+i}$ என்ற கலப்பெண்ணின் முதன்மை வீச்சு **Ans :** $\frac{-3\pi}{4}$

17. $(\sin 40° + i \cos 40°)^5$ - ன் முதன்மை வீச்சு **Ans :** −110°

18. (1+ i) (1+ 2i) (1+ 3i).....(1+ ni) = x + iy எனில் , $2 \cdot 5 \cdot 10 \cdots (1+ n^2)$ - ன் மதிப்பு **Ans :** $x^2 + y^2$

19. ω ≠ 1 என்பது ஒன்றின் முப்படி மூலம் மற்றும் $(1+\omega)^7 = A + B\omega$ எனில் , (A,B) என்பது **Ans :** (1, 1)

20. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4i\,(1-i\sqrt{3})}\right)^2$ என்ற கலப்பெண்ணின் முதன்மை வீச்சு **Ans :** $\frac{\pi}{2}$

21. $x^2 + x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில் , $\alpha^{2020} + \beta^{2020}$ - ் மதிப்பு **Ans :** −1

22. $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$- ன் எல்லா நான்கு மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகை **Ans :** 1

23. $\omega \neq 1$ என்பது ஒன்றின் முப்படி மூலம் மற்றும் $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\omega^2-1 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^7 \end{vmatrix} = 3k$ எனில் ,
k - ன் மதிப்பு **Ans :** $-\sqrt{3}i$

24. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ - ன் மதிப்பு **Ans :** cis $\frac{2\pi}{3}$

25. $\omega = \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$ எனில் $\begin{vmatrix} z+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & z+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & z+\omega \end{vmatrix} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் வெவ்வேறான மூலங்களின் எண்ணிக்கை . **Ans:** 1

அத்தியாயம் – 3

1. $x^3 + 64$ -ன் ஒரு பூச்சியமாக்கி **Ans :** -4

2. f மற்றும் g என்பன முறையே m மற்றும் n படியுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவைகள் மற்றும் h(x) = (f o g)(x) எனில், h -ன் படியானது **Ans :** mn

3. x – ல் n படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு பெற்றுள்ள மூலங்கள் **Ans :** n கலப்பெண் மூலங்கள்

4. $x^3 + px^2 + qx + r$ -க்கு, α , β , - மற்றும் γ என்பவை பூச்சியமாக்கிகள் எனில், $\sum\frac{1}{\alpha}$ - ன் மதிப்பு **Ans :** $-\frac{q}{r}$

5. விகிதமுறு மூலத் தேற்றத்தின்படி பின்வருவனவற்றுள் எந்த எண் $4x^7 + 2x^4 - 10x^3 - 5$ என்பதற்கு சாத்தியமற்ற விகிதமுறு பூச்சியமாகும்? **Ans :** $\frac{4}{5}$

6. $x^3 - kx^2 + 9x$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு மூன்று மெய்யெண் பூச்சியமாக்கிகள் இருப்பதற்கு தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை **Ans :** $|k| \geq 6$

7. [0, 2π] -ல் $\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1$ -ஐ நிறைவு செய்யும் மெய்யெண்களின் எண்ணிக்கை **Ans :** 2

8. $x^3 + 12x^2 + 10ax + 1999$ – க்கு நிச்சயமாக ஒரு மிகையெண் பூச்சியமாக்கி இருப்பதற்கு தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனை **Ans :** $a < 0$

9. $x^3 + 2x + 3$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு
Ans : ஒரு குறை மற்றும் இரு மெய்யெண் பூச்சியமாக்கிகள் இருக்கும்

10. $\sum_{j=0}^{n} {}^nC_r(-1)^r x^r$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவையின் மிகையெண் பூச்சியமாக்கிகளின் எண்ணிக்கை **Ans :** n

அத்தியாயம் - 4

1. $\sin^{-1}(\cos x),\ 0 \leq x \leq \pi$ -ன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{\pi}{2} - x$

2. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{2\pi}{3}$; எனில் $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y$ என்பதன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{\pi}{3}$

3. $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \cos^{-1}\frac{12}{13} + \sec^{-1}\frac{5}{3} - \text{cosec}^{-1}\frac{13}{12}$ என்பதன் மதிப்பு **Ans :** 0

4. $\sin^{-1}x = 2\sin^{-1}\alpha$ - க்கு ஒரு தீர்வு இருந்தால், பின்னர் **Ans :** $|\alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

5. பின்வருவனவற்றில் எம்மதிப்புகளுக்கு $\sin^{-1}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$ க்கு மெய்யாகும் **Ans :** $0 \leq x \leq \pi$

6. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = \frac{3\pi}{2}$ எனில் , $x^{2017} + y^{2018} + z^{2019} - \frac{9}{x^{101}+y^{101}+z^{101}}$ - ன் மதிப்பு **Ans :** 0

7. சில $x \in R$ – க்கு $\cot^{-1}x = \frac{2\pi}{5}$ எனில், $\tan^{-1}x$ - ன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{\pi}{10}$

8. $f(x) = \sin^{-1}\sqrt{x-1}$ என வரையறுக்கப்படும் சார்பின் சார்பகம் **Ans :** [1,2]

9. $x = \frac{1}{5}$ எனில் , $\cos(\cos^{-1}x + 2\sin^{-1}x)$ - ன் மதிப்பு **Ans :** $-\frac{1}{5}$

10. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$ என்பதின் சமம் **Ans :** $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

11. சார்பு $f(x) = \sin^{-1}(x^2 - 3)$ எனில், x இருக்கும் இடைவெளி **Ans :** $[-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$

12. $\cot^{-1}2$ மற்றும் $\cot^{-1}3$ ஆகியன ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்கள் எனில், மூன்றாவது கோணமானது **Ans :** $\frac{3\pi}{4}$

13. $\sin^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) - \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right) = \frac{\pi}{6}$ - ல் x என்பதை மூலமாக கொண்ட சமன்பாடு **Ans :** $x^2 - x - 12 = 0$

14. $\sin^{-1}(2\cos^2 x - 1) + \cos^{-1}(1 - 2\sin^2 x) =$ **Ans :** $\frac{\pi}{2}$

15. $\cot^{-1}(\sqrt{\sin\alpha}) + \tan^{-1}(\sqrt{\sin\alpha}) = u$ எனில் , cos 2u ன் மதிப்பு **Ans :** -1

16. $|x| \le 1$, எனில், $2\tan^{-1}x - \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ என்பதற்கு சமம் **Ans :** 0

17. $\tan^{-1}x - \cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு **Ans :** ஒரேயொரு தீர்வு

18. $\sin^{-1}x + \cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ எனில் , x - ன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

19. $\sin^{-1}\frac{x}{5} + \text{cosec}^{-1}\frac{5}{4} = \frac{\pi}{2}$ எனில், x -ன் மதிப்பு **Ans :** 3

20. $\sin(\tan^{-1}x)$ எனில் , $|x| < 1$ - ன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

அத்தியாயம் - 5

1. (1,5) மற்றும் (4,1) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்வதும் y-அச்சைத் தொட்டுச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 5x - 6y + 9 + \lambda(4x + 3y - 19) = 0$ எனில் λ - ன் மதிப்பு **Ans :** $0, -\frac{40}{9}$

2. செவ்வகல நீள 8 அலகுகள் மற்றும் துணையச்சின் நீளம் குவியங்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தில் பாதி உள்ள அதிபரவளையத்தின் மையத்தொலைத் தகவு **Ans :** $2\sqrt{3}$

3. வட்டம் $x^2 + y^2 = 4x + 8y + 5$ நேர்க்கோடு $3x - 4y = m$ - ஐ இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது எனில் **Ans :** $-35 < m < 15$

4. x - அச்சை (1,0) என்ற புள்ளியில் தொட்டுச் செல்வதும் (2,3) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான வட்டத்தின் விட்டம் **Ans :** $\frac{10}{3}$

5. $3x^2 + by^2 + 4bx - 6by + b^2 = 0$ என்ற வட்டத்தின் ஆரம் **Ans :** $\sqrt{10}$

6. $x^2 - 8x - 12 = 0$ மற்றும் $y^2 - 14y + 45 = 0$ என்ற கோடுகளால் அடைபடும் சதுரத்தின் உள்ளே வரையப்படும் மிகப்பெரிய வட்டத்தின் ஆரம் **Ans :** (4, 7)

7. நேர்க்கோடு $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ - க்கு இணையாக $2x + 4y = 3$ என்ற வட்டத்தின் செங்கோட்டுச் சமன்பாடு **Ans :** $x + 2y = 3$

8. P(x,y) என்ற புள்ளி குவியங்கள் F_1 (3, 0) மற்றும் F_2 (−3, 0) கொண்ட கூம்பு வளைவு $16x^2 + 25y^2 = 400$ - ன் மீதுள்ள புள்ளி எனில் $PF_1 + PF_2$ - ன் மதிப்பு **Ans :** 10

9. $x + y = 6$ மற்றும் $x + 2y = 4$ என்ற நேர்க்கோடுகளை விட்டங்களாகக் கொண்டு (6,2) புள்ளி வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் ஆரம் **Ans :** $2\sqrt{5}$

10. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ மற்றும் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ என்ற அதிபரவளையங்களின் குவியங்கள் ஒரு நாற்கரத்தின் முனைகள் எனில் அந்த நாற்கரத்தின் பரப்பு **Ans :** $2(a^2 + b^2)$

11. $y^2 = 4x$ என்ற பரவளையத்தின் செவ்வகல முனைகளில் வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடுகள் $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = r^2$ என்ற வட்டத்தின் தொடுகோடுகள் எனில் r^2 - ன் மதிப்பு **Ans :** 2

11. $x + y = k$ என்ற நேர்க்கோடு பரவளையம் $y^2 = 12x$ - இன் செங்கோட்டுச்

சமன்பாடாக உள்ளது எனில் k - ன் மதிப்பு **Ans :** 9

12. நீள்வட்டம் $E_1 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ செவ்வகம் R – க்குள் செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் நீள்வட்டத்தின் அச்சுகளுக்கு இணையாக இருக்குமாறு அமைந்துள்ளன . அந்த செவ்வகத்தின் சுற்றுவட்டமாக அமைந்த மற்றொரு நீள்வட்டம் E_2, (0, 4) என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது எனில் அந்த நீள்வட்டத்தின் மையத்தொலைத் தகவு **Ans :** $\frac{1}{2}$

13. 2x − y = 1என்ற கோட்டிற்கு இணையாக $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரையப்பட்டால் தொடுபுள்ளிகளில் ஒன்று **Ans :** $\left(\frac{9}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

14. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் குவியங்கள் வழியாகவும் (0,3) என்ற புள்ளியை மையமாகவும் கொண்ட நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு **Ans :** $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$

15. C என்ற வட்டத்தின் மையம் (1,1) மற்றும் ஆரம் 1 அலகு என்க . T என்ற வட்டத்தின் மையம் (0,y) ஆகவும் ஆதிப்புள்ளிவழியாகவும் உள்ளது .மேலும் C என்ற வட்டத்தை வெளிப்புறமாகத் தொட்டுச் செல்கிறது எனில் வட்டம் T - ன் ஆரம் **Ans :** $\frac{1}{4}$

16. மையம் ஆதிப்புள்ளியாகவும் நெட்டச்சு x - அச்சாகவும் உள்ள நீள்வட்டத்தைக் கருத்தில் கொள்க . அதன் மையத்தொலைத் தகவு $\frac{3}{5}$ மற்றும் குவியங்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் 6 எனில் அந்த நீள்வட்டத்தின் உள்ளே நெட்டச்சு மற்றும் குற்றச்சுகளை மூலைவிட்டங்களாகக் கொண்டு வரையப்படும் நாற்கரத்தின் பரப்பு **Ans :** 40

18. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தினுள் வரையப்படும் மிகப்பெரிய செவ்வகத்தின் பரப்பு **Ans :** 2ab

19. நீள்வட்டத்தின் அரைக்குற்றச்சு OB , F மற்றும் F’ குவியங்கள் மற்றும் FBF' ஒரு செங்கோணம் எனில் அந்த நீள்வட்டத்தின் மையத்தொலைத் தகவு காண்க . **Ans :** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

20. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = \frac{y^2}{9}$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மையத்தொலைத் தகவு **Ans :** $\frac{1}{3}$

21. P என்ற புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4x$ என்ற பரவளையத்திற்கு வரையப்படும் இரு தொடுகோடுகளுக்கிடையேயான கோணம் செங்கோணம் எனில் P -ன் நியமப்பாதை

Ans : $x = -1$

22. (1,-2) என்ற புள்ளி வழியாகவும் (3,0) என்ற புள்ளியில் x -அச்சைத் தொட்டுச் செல்வதுமான வட்டம் பின்வரும் புள்ளிகளில் எந்தப் புள்ளி வழியாகச் செல்லும்? **Ans :** $(5, -2)$

23. (-2,0) -இலிருந்து ஒரு நகரும் புள்ளிக்கான தூரம் அந்தப் புள்ளிக்கும் நேர்க்கோடு $x=-\frac{9}{2}$ - க்கும் இடையேயான தூரத்தைப் போல் $\frac{2}{3}$ மடங்கு உள்ளது எனில் அந்தப் புள்ளியின் நியமப்பாதை **Ans :** நீள்வட்டம்

24. $x^2 - (a + b)x - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் மதிப்புகள் m - ன் மதிப்புகளாக இருக்கும் போது $y = mx + 2\sqrt{5}$ என்ற நேர்க்கோடு $16x^2 - 9y^2 = 144$ என்ற அதிபரவளையத்தைத் தொட்டுச் செல்கின்றது எனில் (a + b) -ன் மதிப்பு **Ans :** 0

25. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + c = 0$ என்ற வட்டத்தின் விட்டத்தின் ஒரு முனை (11, 2) எனில் அதன் மறுமுனை **Ans :** (-3, 2)

அத்தியாயம் - 6

1. $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பன இணை வெக்டர்கள் எனில் , $[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$ - ன் மதிப்பு **Ans :** 0

2. $\vec{\beta}$ மற்றும் $\vec{\gamma}$ ஆகியவை அமைக்கும் தளத்தில் $\vec{\alpha}$ அமைந்துள்ளது எனில் , **Ans :** $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = 0$

3. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ எனில் , $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ - ன் மதிப்பு **Ans :** $|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$

4. $\vec{b}$ - க்கு செங்குத்தாகவும் $\vec{c}$ - க்கு இணையாகவும் உள்ள வெக்டர் $\vec{a}$ என்றவாறுள்ள ஓரலகு வெக்டர்கள் $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ னில் , $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ - க்குச் சமமானது **Ans :** $\vec{b}$

5. $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 1$ எனில் , $\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}} + \frac{\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})}{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}} + \frac{\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}{(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}$ - ன் மதிப்பு **Ans :** 1

6. $\hat{i} + \hat{j}, \hat{i} + 2\hat{j}, \hat{i} + \hat{j} + \pi\hat{k}$ என்ற வெக்டர்களை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு **Ans :** π

7. $\vec{a}, \vec{b}$ என்பன $[\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}] = \frac{\pi}{4}$ எனுமாறுள்ள ஓரலகு வெக்டர்கள் எனில் , $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் **Ans :** $\frac{\pi}{6}$

8. $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}, \vec{b} = \hat{i}+\hat{j}$ மற்றும் $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ எனில் , $\lambda + \mu$ - ன் மதிப்பு **Ans :** 0

9. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 3$ எனுமாறுள்ள ஒரு தளம் அமையா மூன்று பூச்சியமற்ற வெக்டர்கள் எனில் , $\{[\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}]\}^2$ - ன் மதிப்பு **Ans :** 81

10. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{\sqrt{2}}$ எனுமாறுள்ள ஒரு தளம் அமையா மூன்று ஓரலகு வெக்டர்கள் எனில் , $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் **Ans :** $\frac{3\pi}{4}$

11. $\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}$ ஆகியவற்றை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் அளவு 8 கன அலகுகள் எனில் , $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})$, $(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})$ மற்றும் $(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{a}\times\vec{b})$ ஆகியவற்றை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு **Ans :** 64 கன அலகுகள்

12. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ என்பன $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = 0$ எனுமாறுள்ள வெக்டர்கள் என்க .

$\vec{a}, \vec{b}$ என்ற ஒரு ஜோடி வெக்டர்களாலும் மற்றும் $\vec{c}, \vec{d}$ என்ற ஒரு ஜோடி வெக்டர்களாலும் அமைக்கப்படும் தளங்கள் முறையே P_1 மற்றும் P_2 எனில் , இத்தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் **Ans :** 0°

13. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன $\vec{b}.\vec{c} \neq 0$ மற்றும் $\vec{a}.\vec{b} \neq 0$ எனுமாறுள்ள மூன்று வெக்டர்கள் என்க . $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ எனில் , $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{c}$ என்பவை **Ans :** இணையானவை

14. $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{c} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$ எனில் , $\vec{a}$ - க்குச் செங்குத்தானதாகவும் $\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ என்ற வெக்டர்கள் உருவாக்கும் தளத்தில் அமைவதுமான வெக்டர் **Ans :** $-17\hat{i} - 21\hat{j} - 97\hat{k}$

15. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2}, z = 2$ மற்றும் $\frac{x-1}{1} = \frac{2y+3}{3} = \frac{z+5}{2}$ என்ற கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் **Ans :** $\frac{\pi}{2}$

16. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{2}$ என்ற கோடு $x + 3y - \alpha z + \beta = 0$ என்ற தளத்தின் மீது இருந்தால் , பின்னர் (α , β) என்பது **Ans :** $(-6, 7)$

17. $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + t(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$ என்ற கோட்டிற்கும் $\vec{r}.(\hat{i} + \hat{j}) + 4 = 0$ என்ற தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் **Ans :** 45°

18. $\vec{r} = (6\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) + t(-\hat{i} + 4\hat{k})$ என்ற கோடு $\vec{r}.(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 3$ என்ற தளத்தை சந்திக்கும் புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் **Ans :** $(5, -1, 1)$

19. ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து $3x - 6y + 2z + 7 = 0$ என்ற தளத்திற்கு உள்ள தொலைவு **Ans :** 1

20. $x + 2y + 3z + 7 = 0$ மற்றும் $2x + 4y + 6z + 7 = 0$ ஆகிய தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு **Ans :** $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

21. ஒரு கோட்டின் திசைக்கொசைன்கள் $\frac{1}{c}, \frac{1}{c}, \frac{1}{c}$ எனில் , **Ans :** $c = \pm\sqrt{3}$

22. $\vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}) + t(6\hat{i} - \hat{k})$ என்ற வெக்டர் சமன்பாடு குறிக்கும் நேர்க்கோட்டின் மீது உள்ள புள்ளிகள் **Ans :** $(1, -2, -1)$ மற்றும் $(1, 4, -2)$

23. ஆதியிலிருந்து $(1,1,1)$ எந்த புள்ளிக்கு உள்ள தொலைவானது $x + y + z + k = 0$ என்ற தளத்திலிருந்து அப்புள்ளிக்கு உள்ள தொலைவில் பாதி எனில் , k - ன் மதிப்புகள் **Ans :** $3, -9$

24. $\vec{r}.(2\hat{i} - \lambda\hat{j} + \hat{k}) = 3$ மற்றும் $\vec{r}.(4\hat{i} + \hat{j} + \mu\hat{k}) = 5$ ஆகிய தளங்கள் இணை எனில் , λ மற்றும் μ - ன் மதிப்புகள் **Ans :** $-\frac{1}{2}, -2$

25. ஆதியிலிருந்து $2x + 3y + \lambda z = 1$, $\lambda > 0$ என்ற தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளம் $\frac{1}{5}$ எனில் , λ- ன் மதிப்பு **Ans :** $2\sqrt{3}$

அத்தியாயம் - 7

1. ஒரு கோளத்தின் கன அளவு வினாடிக்கு 3π செ.மீ^{3} வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது. ஆரம் $\frac{1}{2}$ செ.மீ ஆக இருக்கும்போது ஆரத்தின் மாறுபாட்டு வீதம் **Ans :** 3 செ.மீ/வி

2. ஒரு பலூனானது செங்குத்தாக மேல் நோக்கி 10 மீ/வி வீதத்தில் செல்கிறது . பலூன் செலுத்தப்பட்ட இடத்திலிருந்து 40 மீ தொலைவில் இடருந்து ஒருவர் இதனைப் பார்க்கிறார் பலூனின் ஏற்றக் கோணத்தில் ஏற்படும் மாறுபாட்டு வீதத்தை பலூன் தரையிலிருந்து 30 மீட்டர் உயரத்தில் இருக்கும்போது காண்க. **Ans :** $\frac{4}{25}$ ரேடியன்கள்/வினாடி

3. t என்ற காலத்தில் கிடைமட்டமாக நகரும் துகளின் நிலை $s(t) = 3t^2 - 2t - 8$ எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளது . துகள் ஓய்வு நிலைக்கு வரும் நேரம் **Ans :** $t = \frac{1}{3}$

4. ஒரு கல்லானது செங்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்படுகின்றது. t நேரத்தில் அது அடைந்த உயரம் $x = 80t - 16t^2$. கல் அதிகபட்ச உயரத்தை t வினாடி நேரத்தில் அடைந்தால் t ஆனது **Ans :** 2.5

5. $6y = x^3 + 2$ என்ற வளைவரையின் எப்புள்ளியில் y - ஆயத் தொலைவின் மாறுபாட்டு வீதம் x - ஆயத் தொலைவின் மாறுபாட்டு வீதத்தைப் போல் 8 மடங்கு இருக்கும். **Ans :** $(4,11)$

6. $f(x) = \sqrt{8 - 2x}$ என்ற வளைவரையின் எந்த x - ஆயத் தொலைவில் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சாய்வு -0.25 ? இருக்கும்? **Ans :** -4

7. $f(x) = 2\cos 4x$ என்ற வளைவரைக்கு $x = \frac{\pi}{12}$ -ல் செங்கோட்டின் சாய்வு **Ans :** $\frac{\sqrt{3}}{12}$

8. $y^2 - xy + 9 = 0$ என்ற வளைவரையின் தொடுகோடு எப்போது நிலைகுத்தாக இருக்கும் ? **Ans :** $y = \pm 3$

9. ஆதியில் $y^2 = x$ மற்றும் $x^2 = y$ என்ற வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் **Ans :** $\frac{\pi}{2}$

10. $\lim_{x\to\infty}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$- ன் மதிப்பு **Ans :** 0

11. $\sin^4 x + \cos^4 x$ என்ற சார்பு இறங்கும் இடைவெளி **Ans :** $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

12. $x^3 - 3x^2$, $x \in [0,3]$ என்ற சார்பிற்கு ரோலின் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யும் எண் **Ans :** 2

13. $\frac{1}{x}$, $x \in [1,9]$ என்ற சார்பிற்கு சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யும் எண் **Ans :** 3

14. $|3 - x| + 9$ என்ற சார்பின் குறைந்த மதிப்பு **Ans :** 9

15. $y = e^x \sin x, x \in [0,2\pi]$ என்ற வளைவரையின் மீப்பெரு சாய்வு எங்கு அமையும்? **Ans :** $x = \frac{\pi}{2}$

16. $x^2 e^{-2x}, x > 0$ என்ற சார்பின் பெரும மதிப்பு **Ans :** $\frac{1}{e^2}$

17. (6,0) என்ற புள்ளிக்கும் $x^2 - y^2 = 4$ என்ற வளைவரை மீதுள்ள புள்ளிக்கும் உள்ள தொலைவு குறைந்தபட்சம் எனில் அப்புள்ளி **Ans :** $(3, \sqrt{5})$

19. இரண்டு மிகை எண்களின் கூடுதல் 200 மேலும் அவற்றின் பெருக்கல் பலனின் பெரும மதிப்பு **Ans :** 100

19. $y = ax^4 + bx^2$, $ab > 0$ என்ற வளைவரை **Ans :** வளைவு மாற்றப் புள்ளியை பெறவில்லை

20. $y = (x-1)^3$ என்ற வளைவரையின் வளைவு மாற்றப் புள்ளி **Ans :** $(1,0)$

அத்தியாயம் – 8

1. ஒரு வட்ட வடிவ வார்ப்பின் ஆரம் 10 செ மீ. ஆரத்தின் அளவில் தோராயமாக 0.02 செ மீ பிழை உள்ளது எனில் அதன் பரப்பில் ஏற்படும் தோராய சதவீதப் பிழையைக் காண்க . **Ans :** 0.4%

2. 31-ன் 5 ஆம் படி மூல சதவீதப் பிழை தோராயமாக , 31-ன் சதவீதப் பிழையைப் போல் எத்தனை மடங்காகும்? **Ans :** $\frac{1}{5}$

3. $u(x,y) = e^{x^2+y^2}$, எனில் $\frac{\partial u}{\partial x}$ - ன் மதிப்பு **Ans :** $2xu$

4. $v(x,y) = \log(e^x + e^y)$, எனில் $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ - ன் மதிப்பு **Ans :** 1

5. $w(x,y) = x^y, x > 0$, எனில் $\frac{\partial w}{\partial x}$ - ன் மதிப்பு **Ans :** yx^{y-1}

6. $f(x,y) = e^{xy}$, எனில் $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ - ன் மதிப்பு **Ans :** $(1+xy)e^{xy}$

7. ஒரு கன சதுரத்தின் பக்க அளவு 4 செ மீ மற்றும் அதன் பிழை 0.1 செ மீ எனில் கன அளவு கணக்கீட்டில் ஏற்படும் பிழை **Ans :** 4.8 கன செ மீ

8.ஒரு கன சதுரத்தின் பக்க அளவு x_0 – இலிருந்து $x_0 + dx$ ஆக மாறும் போது அதன் வளைபரப்பு $S = 6x^2$ இல் ஏற்படும் மாற்றம் **Ans :** $12x_0 dx$

9.ஒரு கன சதுரத்தின் பக்க அளவு 1% அதிகரிக்கும் போது அதன் கன அளவில் ஏற்படும் மாற்றம் **Ans :** $0.03x^2$மீ

10. $g(x,y) = 3x^2 - 5y + 2y^2, x(t) = e^t$ மற்றும் $y(t) = \cos t$, எனில் $\frac{dg}{dt}$ - ன் மதிப்பு

Ans : $6e^{2t} + 5\sin t - 4\cos t \sin t$

11. $f(x) = \frac{x}{x+1}$, எனில் அதன் வகையீடு **Ans :** $\frac{1}{(x+1)^2}dx$

12. $u(x,y) = x^2 + 3xy + y - 2019$, எனில் $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(4,-5)}$ - ன் மதிப்பு **Ans :** -7

13. சார்பு $g(x) = \cos x$ -ன் தோராய மதிப்பு $x = \frac{\pi}{2}$ இல் **Ans :** $-x + \frac{\pi}{2}$

14. $w(x,y,z) = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$, எனில் $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ - ன் மதிப்பு **Ans :** 0

15. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, எனில் $f_x - f_z$ - ன் மதிப்பு **Ans :** $z - x$

அத்தியாயம் - 9

1. $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ இன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{\pi}{6}$

2. $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$ இன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{5}{2}$

3. ஒவ்வொரு $n \in Z$ - க்கும் $\int_0^{\pi} e^{\cos^2 x}\cos^3[(2n+1)x]\, dx$ இன் மதிப்பு **Ans :** 0

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx$ இன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{2}{3}$

5. $\int_{-4}^{4} \left[\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{x^4+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x^4+1}{x^2}\right)\right] dx$ இன் மதிப்பு **Ans :** 4π

6. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2x^7-3x^5+7x^3-x+1}{\cos^2 x}\right) dx$ இன் மதிப்பு **Ans :** 2

7. $f(x) = \int_0^x t\cos t\, dt$, எனில் $\frac{df}{dx} =$ **Ans :** $x\cos x$

8. $y^2 = 4x$ என்ற பரவளையத்திற்கும் அதன் செவ்வகலத்திற்கும் இடையே பரப்பானது **Ans :** $\frac{8}{3}$

9. $\int_0^1 x(1-x)^{99} dx$ இன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{1}{10100}$

10. $\int_0^1 \frac{dx}{1+5^{\cos x}}$ இன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{\pi}{2}$

11. $\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} = 90$ எனில் n இன் மதிப்பு **Ans :** 9

12. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 3x\, dx$ இன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{2}{9}$

13. $\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx$ இன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{3\pi}{8}$

14. $\int_0^{\infty} e^{-3x}x^2 dx$ இன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{2}{27}$

15. $\int_0^a \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{\pi}{8}$ எனில் a இன் மதிப்பு **Ans :** 2

16. $y^2 = x(a-x)$ என்ற வளைவரையில் அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பை x - அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவு **Ans :** $\frac{\pi a^3}{6}$

17. $f(x) = \int_1^x \frac{e^{\sin u}}{u} du, x > 1$ மற்றும் $\int_1^3 \frac{e^{\sin x^2}}{x} dx = \frac{1}{2}[f(a) - f(1)]$ எனில் a பெறக் கூடிய ஒரு மதிப்பு **Ans :** 9

18. $\int_0^1 (\sin^{-1} x)^2 dx$ இன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{\pi^2}{4} - 2$

19. $\int_0^a \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3 dx$ இன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{3\pi a^4}{16}$

20. $\int_0^x f(t)dt = x + \int_x^1 tf(t)dt$ எனில் f(1) இன் மதிப்பு **Ans :** $\frac{1}{2}$

அத்தியாயம் 10

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/3} + x^{1/4} = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி முறையே **Ans :** 2, 3

2. y = A cos(x + B), இங்கு A, B என்பன எதேச்சை மாறிலிகள் எனும் சமன்பாட்டைக் கொண்ட வளைவரை குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு **Ans :** $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

3. $\sqrt{\sin x}(dx+dy) = \sqrt{\cos x}(dx-dy)$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி **Ans :** 1, 1

4. மையம் (h , k) மற்றும் ஆரம் 'a' கொண்ட எல்லா வட்டங்களின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை **Ans :** 3

5. $y = Ae^x + Be^{-x}$ இங்கு A , B என்பன ஏதேனும் இரு மாறிலிகள், எனும் வளைவரைத் தொகுதியின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு **Ans :** $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு **Ans :** $y = kx$

7. $2x\frac{dy}{dx}y = 3$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு குறிப்பிடுவது **Ans :** பரவளையம்

8. $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ - ன் தீர்வு **Ans :** $y = ce^{-\int pdx}$

9. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1+y}{x}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி **Ans :** $\frac{e^x}{x}$

10. $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி x எனில், P(x) என்பது **Ans :** $\frac{1}{x}$

11. $y(x) = 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{1\cdot2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \ldots$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படி **Ans :** 1

12. p மற்றும் q என்பன முறையே $y\frac{dy}{dx} + x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + xy = \cos x$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி எனில் , **Ans :** $p > q$

13. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு **Ans :** $y + \sin^{-1}x = c$

14. $\frac{dy}{dx} = 2xy$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு **Ans :** $y = Ce^{x^2}$

15. $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு **Ans :** $e^x + e^{-y} = C$

16. $\frac{dy}{dx} = 2^{y-x}$ - ன் தீர்வு **Ans :** $\frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} = C$

17. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\phi'\left(\frac{y}{x}\right)}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு **Ans :** $\phi\left(\frac{y}{x}\right) = kx$

18. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ எனும் நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி sin x எனில், P என்பது **Ans :** cot x

19. வரிசை n மற்றும் n +1 கொண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வுகளில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிக்கை முறையே **Ans :** n, n +1

20. மூன்றாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் குறிப்பிட்டத் தீர்வில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் எண்ணிக்கை **Ans :** 0

21. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+1}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகையீட்டுக் காரணி **Ans :** $\frac{1}{x+1}$

22. ஏதேனும் ஒரு வருடம் t - ல் உள்ள P - ன் பெருக்க வீதமானது மக்கள் தொகைக்கு விகிதமாக அமையும் எனில் , பின்னர் **Ans :** $P = Ce^{kt}$

23. t எனும் நேரத்திற்குப் பிறகு மீதமுள்ள ஒரு பொருளின் அளவு P ஆகும் . பொருள் ஆவியாகும் வீதமானது அந்நேரத்தில் மீதமிருக்கும் பொருளின் அளவிற்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது எனில் , பின்னர் **Ans :** $P = Ce^{-kt}$

24. $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+3}{2y+f}$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்குமானால் , a - ன் மதிப்பு **Ans :** -2

25. y = f (x) எனும் வளைவரையின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிடத்து சாய்வு $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது . மேலும் வளைவரையானது (-1,1) புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது எனில் , வளைவரையின் சமன்பாடு **Ans :** $y = x^3 + 2$

அத்தியாயம்- 11

1. X எனும் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$ எனில்,
இவற்றில் எந்த கூற்று சரியானது? **Ans :** சராசரி உள்ளது ஆனால் பரவற்படி இல்லை

2. 2l நீளமுள்ள ஒரு கம்பி சமவாய்ப்பு முறையில் இரு துண்டாக உடைந்தது . இரு துண்டுகளில் குட்டையானதற்கான நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{l} & 0 < x < l \\ 0 & l \leq x \leq 2l \end{cases}$ எனில் குட்டையானப் பகுதிக்கான சராசரி மற்றும் பரவற்படி முறையே **Ans :** $\frac{l}{2}, \frac{l^2}{12}$

3.ஒரு விளையாட்டில் அறுபக்கபகடையை விளையாடுபவர் உருட்டுகிறார் . பகடை எண் 6 -ஐக் காட்டினால் , விளையாடுபவர் ₹36 வெல்லுவார், இல்லையெனில் ₹ k^2,தோற்பார் . இங்கு k என்பது பகடை காட்டும் எண். $k = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. விளையாட்டில் எதிர்பார்க்கப்படும் வெல்லும் தொகை ₹ **Ans :** $-\frac{19}{6}$

4.1, 2 , 3 , 4 , 5 , 6 எண்ணிடப்பட்ட அறுபக்கபகடையும் 1 , 2 , 3 , 4 என எண்ணிடப்பட்ட நான்கு பக்கபகடையும் சோடியாக உருட்டப்பட்டு இரண்டும் காட்டும் எண்களின் கூட்டல் தொகை தீர்மானிக்கப்படுகிறது . இந்த கூட்டலைத் குறிக்கும் சமவாய்ப்பு மாறி X என்க . இனி 7 - இன் நேர்மாறு பிம்பத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை **Ans :** 4

5.n = 25 மற்றும் p = 0.8 என்று உள்ள ஈருறுப்பு பரவல் கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறி X எனில் X - ன் திட்ட விலக்கத்தின் மதிப்பு **Ans :** 2

6.n முறை சுண்டப்படும் ஒரு நாணயத்தினால் பெறப்படும் தலை மற்றும் பூக்களின் எண்ணிக்கைவேறுபாட்டை X குறிக்கிறது என்க . X - இன் சாத்திய மதிப்புகள்
Ans : 2i–n, i = 0,1,2…n

7.$f(x) = \frac{1}{12}$, a<x<b எனும் சார்பு ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பினைக் குறிக்கிறது எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது a மற்றும் b - இன் மதிப்புகளாக இராது? **Ans :** 16 மற்றும் 24

8. ஒரு கால்பந்தாட்ட அரங்கிற்கு ஒரே பள்ளியிலிருந்து நான்கு பேருந்துகள் 160 மாணவர்களை ஏற்றிக்கொண்டுவருகிறது. அப்பேருந்துகளில் முறையே 42 ,36 ,34 , மற்றும் 48 மாணவர்கள் பயணிக்கின்றனர் . சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு மாணவர் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார். அவ்வாறு சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாணவர் பயணிக்கும் பேருந்திலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது என்க . நான்கு பேருந்து ஓட்டுனர்களில் ஒருவர் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றனர். அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஓட்டுநர் ஓட்டி வரும் பேருந்திலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை Y குறிக்கிறது என்க . இனி E(X) மற்றும் E(Y) முறையே **Ans :** 40.75, 40

9.இரு நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன . முதல் நாணயத்தில் தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.6 மற்றும் இரண்டாவது நாணயத்தின் மூலம் தலை கிடைக்க நிகழ்தகவு 0.5 ஆகும். சுண்டி விடுதலின் முடிவுகள் சார்பற்றவை எனக் கருதுக . X என்பது மொத்த தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது என்க . E(X) -ன் மதிப்பு **Ans :** 1.1

10.பலவுள் தேர்வு ஒன்றில் 5 வினாக்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் 3 சாத்தியமானக் கவனச்சிதறல் விடைகள்
உள்ளது. ஊகத்தின் அடிப்படையில் 4 அல்லது அதற்கு மேல் சரியான விடையை ஒரு மாணவர் அளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு **Ans :** $\frac{11}{243}$

11. P(X = 0) = 1 − P(X = 1) மற்றும் E(X)=3Var(X) எனில் , P(X =0) காண்க **Ans :** $\frac{1}{3}$

12. எதிர்பார்ப்பு மதிப்பு 6 மற்றும் பரவற்படி 2.4 . கொண்ட ஒரு ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X எனில் P(X =5) – இன் மதிப்பு **Ans :** $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^5$

13. சமவாய்ப்பு மாறி X -ன் நிகழ்தகவு அடர்த் தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} ax + b & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$ மற்றும் $E(X) = \frac{7}{12}$, எனில் a மற்றும் b - ன் மதிப்புகள் முறையே **Ans :** 1 மற்றும் $\frac{1}{2}$

14. 0,1, மற்றும் 2 ஆகிய மதிப்புகளில் ஒன்றை X கொள்கிறது என்க . ஏதோ ஒரு மாறிலி k - விற்கு , $P(X = i) = k\ P(X = i - 1)$, i = 1 , 2 மற்றும் $P(X = 0) = \frac{1}{7}$ எனில் k -இன் மதிப்பு காண்க **Ans :** 2

15. பின்வருவனவற்றுள் எது தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி?
Ans : I. ஒரு நாளில் ஒரு குறிப்பிட்ட சமிக்கையைக் கடக்கும் மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை
II. ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் தொடர்வண்டி பயணச்சீட்டு வாங்க வரிசையில் காத்திருக்கும் பயணிகளின் எண்ணிக்கை .

16.ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$ எனில், a – இன் மதிப்பு **Ans :** 1

17. ஒரு நிகழ்தகவு மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பு கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	k	2k	3k	4k	5k

எனில், E(X) -க்கு சமமான மதிப்பு **Ans :** $\frac{2}{3}$

18. சராசரி 0.4 கொண்ட ஒரு பெர்னோலி பரவல் X எனில் (2X −3)-ன் பரவல் **Ans :** 0.96

19. ஈருறுப்பு மாறி X ஆறு முயற்சிகளில் 9P(X = 4)= P(X = 2)எனும் தொடர்பினை அனுசரிக்கிறது எனில் வெற்றியின் நிகழ்தகவு **Ans :** 0.25

20.ஒரு கணினி விற்பனையாளர் தனது கடந்த கால அனுபவத்திலிருந்து தனது காட்சி கூடத்திற்குள் நுழையும் ஒவ்வொரு இருபது வாடிக்கையாளர்களில் ஒருவருக்கு கணினிகளை விற்கிறார் என்பது தெரியும் . அடுத்த மூன்று வாடிக்கையாளர்களில் சரியாக இரண்டு பேருக்கு அவர் ஒரு கணினியை விற்கும் நிகழ்தகவு என்ன ? **Ans :** $\frac{57}{20^3}$

அத்தியாயம் – 12

1. ஓர் ஈருறுப்புச் செயலி S என்ற ஒரு கணத்தின் மீது ஒரு சார்பாக பின்வருவனவற்றிலிருந்து பெறப்படுகிறது **Ans :** $(S\times S)\rightarrow S$
2. கழித்தலின் கீழ் பின்வரும் கணம் அடைவு பெறவில்லை. **Ans :** N
3. பின்வருபவைகளில் எது N -ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயலி ஆகும். **Ans :** பெருக்கல்
4. மெய் எண்களின் கணம் R -ன் மீது ' $*$ ' பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது . இதில் எது R – ன் மீது ஈருறுப்புச் செயலி அல்ல ? **Ans :** $a * b = a^b$
6. $*$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலி $a * b = \frac{ab}{7}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது . $*$ எதன் மீது ஈருறுப்புச் செயலி ஆகாது ? **Ans :** Z
6. Q என்ற கணத்தில் $a \odot b = a+b+ab$ என வரையறு. பின்னர் $3 \odot (y \odot 5) = 7$ -ன் தீர்வு **Ans :** $y = \frac{-2}{3}$
7. R -ன் மீது $a * b = \sqrt{a^2+b^2}$ எனில், $*$ ஆனது
   Ans : பரிமாற்று விதி மற்றும் சேர்ப்பு விதிகளை நிறைவு செய்யும்
8. பின்வரும் கூற்றுகளில் எது T மெய்மதிப்பை பெற்றிருக்கும்? **Ans :** $\sqrt{5}$ ஒரு விகிதமுறா எண்
9. பின்வருபவைகளில் எது மெய்மதிப்பு F ஐ பெற்றிருக்கும்?
   Ans : சென்னை சீனாவில் உள்ளது அல்லது $\sqrt{2}$ ஒரு முழு எண்
10. ஒரு கூட்டுக் கூற்றில் 3 தனிக் கூற்றுகள் உட்படுத்தப்பட்டிருந்தால் அம்மெய்மை அட்டவணையின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை **Ans :** 8
11. $(p \vee q)\rightarrow(p \wedge q)$ - ன் எதிர்மறை கூற்று எது? **Ans :** $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
12. $(p \vee q) \rightarrow r$ - ன் நேர்மாறுக் கூற்று எது? **Ans :** $\neg r \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
13. $(p \wedge q) \vee \neg q$ - ன் மெய்மை அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

p	q	$(p \wedge q) \vee \neg q$
T	T	(a)
T	F	(b)
F	T	(c)
F	F	(d)

பின்வருபவைகளில் எது உண்மை ?

	(a)	(b)	(c)	(d)
Ans :	T	T	F	T

14. $\neg(p \vee \neg q)$ - ன் மெய்மை அட்டவணையில் கடைசி நிரலில் வரும் மெய் மதிப்பு 'F ' விளைவுகளின் எண்ணிக்கை **Ans :** 3
15. பின்வருபவைகளில் எது சரியல்ல ? p மற்றும் q ஏதேனும் இரு கூற்றுகளுக்கு பின்வரும் தர்க்க சமானமானவைகள் பெறப்படுகிறது. **Ans :** $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$

16.

p	q	$(p \wedge q) \rightarrow \neg q$
T	T	(a)
T	F	(b)
F	T	(c)
F	F	(d)

$(p \wedge q) \rightarrow \neg q$ - ன் மெய்மை அட்டவணைக்கு பின்வருபவைகளில் எது சரி?

	(a)	(b)	(c)	(d)
Ans :	F	T	T	T

17. $\neg(p \vee q) \vee [p \vee (p \wedge \neg r)]$ - ன் இருமம் **Ans :** $\neg(p \wedge q) \wedge [p \wedge (p \vee \neg r)]$

18. $p \wedge (\neg p \vee q)$ என்ற கூற்று **Ans :** $p \wedge q$ -க்கு தர்க்க சமானமானவை

19. பின்வரும் ஒவ்வொரு கூற்றிற்கும் அதன் மெய் மதிப்பை தீர்மானிக்க .

(a) 4+2=5 மற்றும் 6+3=9 (b) 3+2=5 மற்றும் 6+1=7

(c) 4+5=9 மற்றும் 1+2=4 (d) 3+2=5 மற்றும் 4+7=11

	(a)	(b)	(c)	(d)
Ans :	F	T	F	T

20. பின்வருபவைகளில் எது உண்மையல்ல ?

Ans : p மற்றும் q ஏதேனும் இரு கூற்றுகள் எனில் $p \leftrightarrow q$ என்பது ஒரு மெய்மமாகும்.